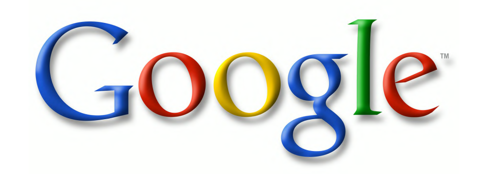
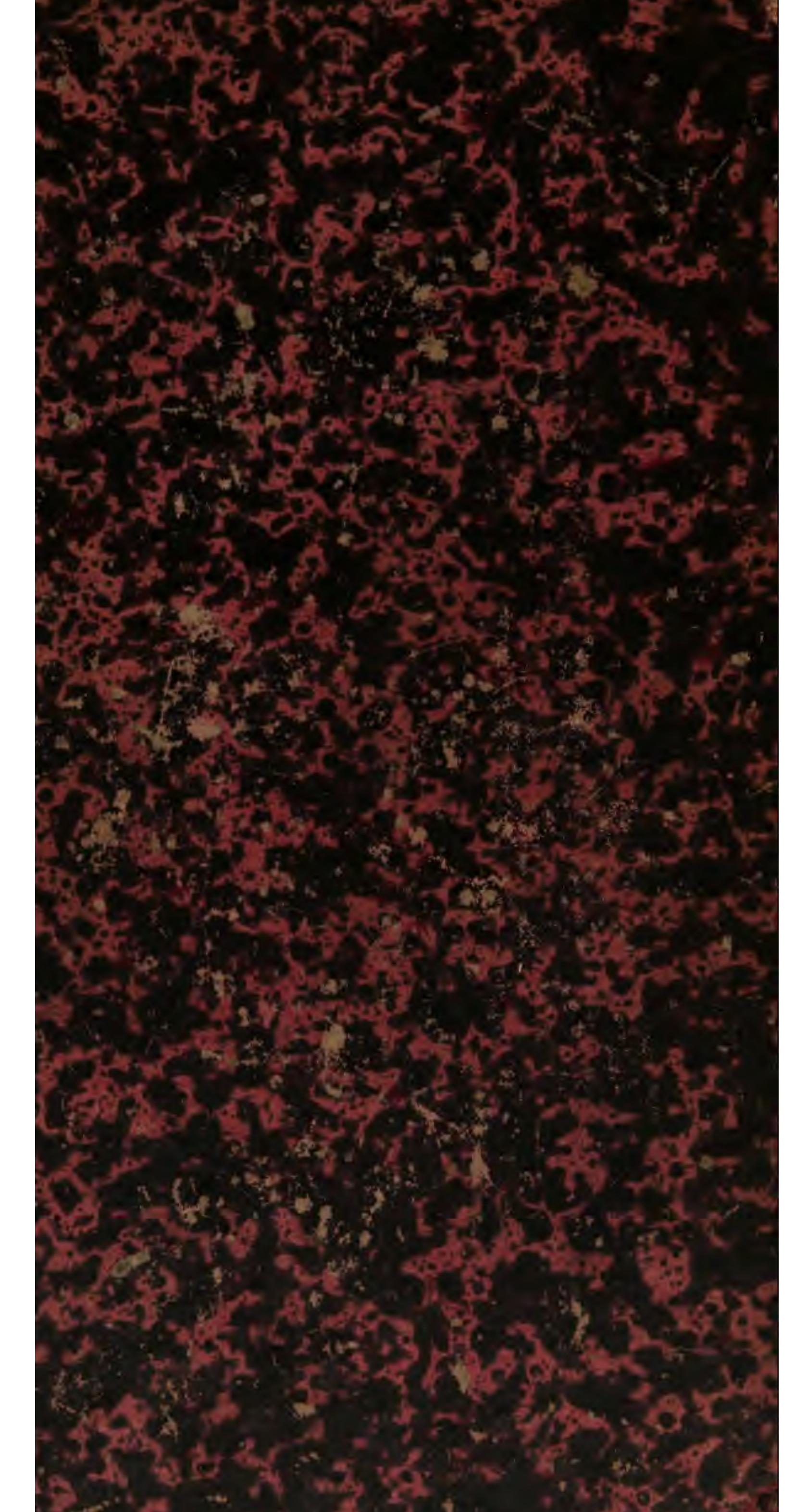
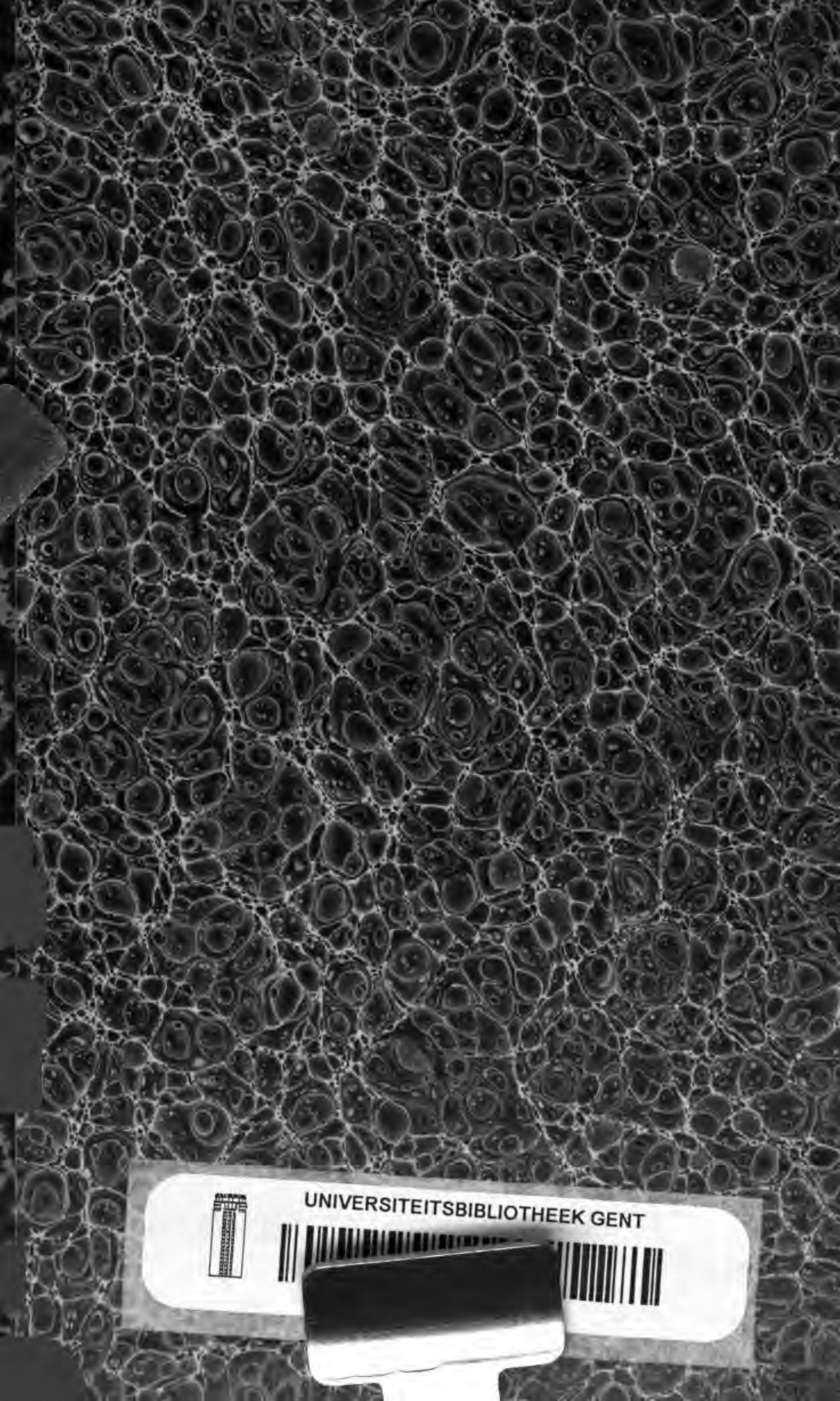
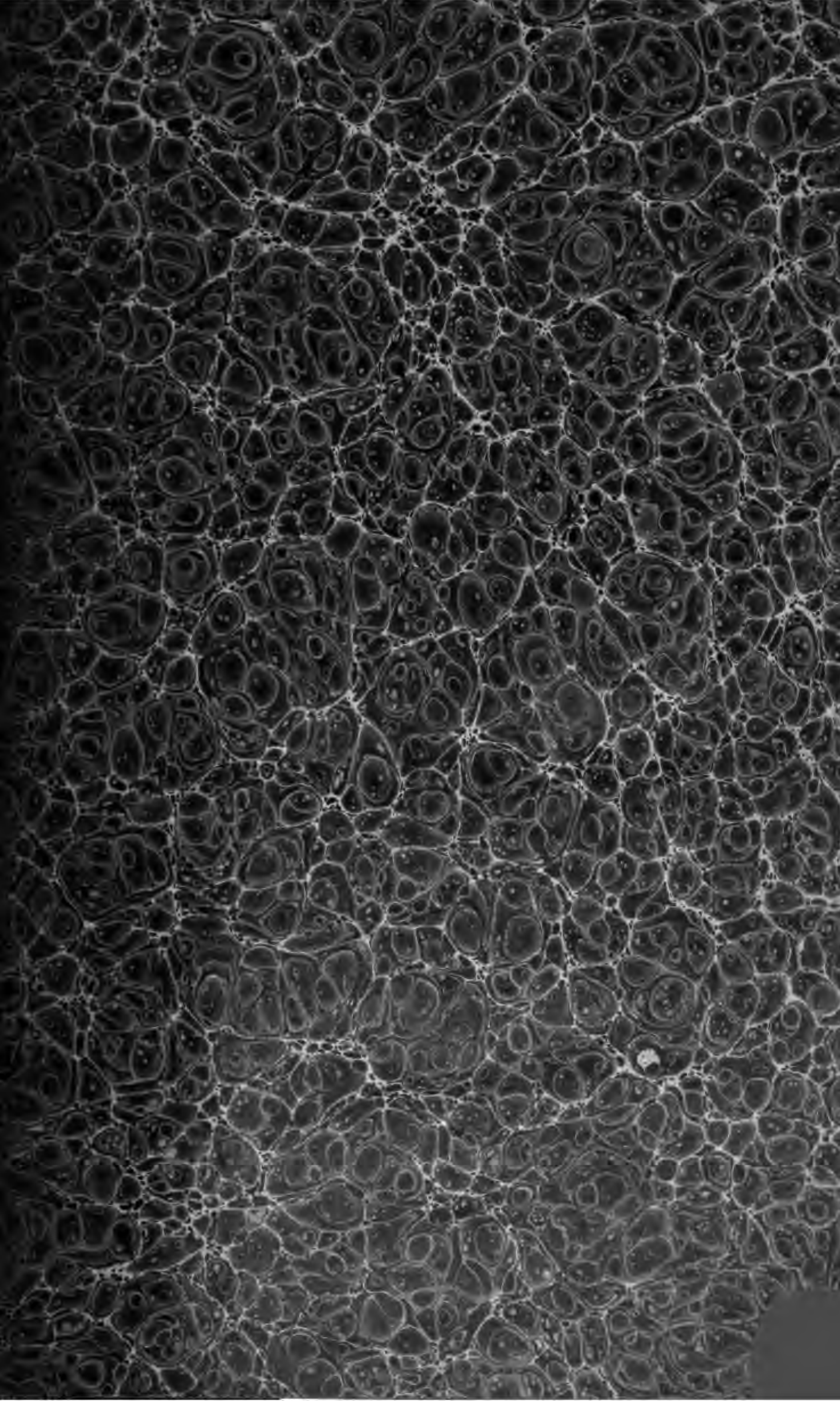





UNIVERSITEITSBIBLIOTHEEK GENT



THÉORIE

DES DÉTERMINANTS.

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
rue du Jardinet, 12.

THÉORIE

DES DÉTERMINANTS

ET

LEURS PRINCIPALES APPLICATIONS;

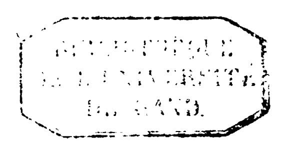
PAR LE DOCTEUR F. BRIOSCHI,
Professeur de Mathématiques appliquées à l'Université royale de Pavie.

TRADUIT DE L'ITALIEN

PAR M. EDOUARD COMBESCURE,
Professeur de Mathématiques.

PARIS,
MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,
Quai des Augustins, 55.

1856



PRÉFACE DE L'AUTEUR.

For what is the theory of determinants? It is an algebr upon algebra; a calculus which enables us to combine and foretell the results of algebraical operations, in th same way as algebra enables us to dispense with the performance of the special operations of arithmetic.

SYLVESTER, *Phil. Mag.*, 1851.

Qu'est au fond la théorie des déterminants? C'est une algèbre au-dessus de l'algèbre, un calcul qui nous met à même de combiner et de prédire les résultats des opérations algébriques, de la même manière que l'algèbre nous permet de nous dispenser de l'exécution des opérations particulières de l'arithmétique.

Les recherches de Cramer et de Bezout (1) sur la résolution des équations algébriques linéaires et sur l'élimination ont donné naissance à la théorie de ces fonctions qui, primitivement appelées *résultantes*, sont généralement désignées dans l'époque présente sous le nom de *déterminants*. La loi de formation des déterminants est due à ces deux géomètres, qui la déduisirent par analogie de la considération de la forme que présentaient les formules de résolution pour les cas de deux et de trois équations du premier degré à

(1) *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques. Appendice*, 1750. — *Histoire de l'Académie royale des Sciences*, 1764.

autant d'inconnues. Cette loi forme encore le but principal des travaux de Laplace et de Vandermonde (1) sur l'élimination, travaux dans lesquels sont démontrées comme corollaires de ladite loi et la propriété que possèdent les déterminants de changer de signe ou de s'annuler lorsqu'on permute ou qu'on suppose identiques quelques-uns des éléments, et cette autre propriété d'après laquelle un déterminant d'un ordre quelconque est équivalent à une somme de produits de déterminants d'ordre inférieur (§ III). Dans le Mémoire de Lagrange (2) relatif au problème de la rotation d'un corps solide et à la pyramide triangulaire, il est fait usage de déterminants du troisième ordre, et l'on trouve énoncées à l'égard de ces déterminants quelques propriétés qui ont été dans la suite étendues aux déterminants d'un ordre quelconque. Ces propriétés peuvent se réduire aux suivantes : 1° le carré d'un déterminant est lui-même un déterminant ; 2° le déterminant à *éléments réciproques* d'un déterminant du troisième ordre est égal au carré de ce dernier déterminant (§§ V et VI). Gauss (3), dans ses recherches sur les formes binaires et ternaires, a généralisé la première de ces propriétés en

(1) *Histoire de l'Académie royale des Sciences*, 1772. Seconde Partie.

(2) *Nouveaux Mémoires de l'Académie royale de Berlin*, 1773.

(3) *Recherches arithmétiques*, 1807.

démontrant, pour les déterminants du second et du troisième ordre, que le produit de deux déterminants est lui-même un déterminant. Dans l'ouvrage classique de cet auteur se trouve introduit pour la première fois dans la science le mot de *déterminant*. Les théorèmes de Lagrange et de Gauss furent étendus par M. Binet (1) à la somme des produits d'un nombre quelconque de déterminants du second, du troisième et du quatrième ordre; mais la généralisation complète de ces théorèmes pour les déterminants d'un ordre quelconque est due à M. Cauchy (2). Les deux premières sections de la seconde partie de l'important Mémoire de cet auteur *Sur le nombre de valeurs qu'une fonction peut acquérir, etc.*, contiennent la règle générale pour la multiplication des déterminants, et les principales propriétés des déterminants à éléments réciproques; dans les deux autres sections se trouvent démontrés les plus importants théorèmes sur les déterminants *mineurs* et sur les déterminants des mêmes déterminants nommés par le même géomètre déterminants *dérivés*. Au Mémoire de M. Cauchy vinrent s'adjoindre successivement divers travaux (3) roulant sur l'application des théorèmes

(1) *Journal de l'École Polytechnique*, XVI[e] Cahier, 1813.
(2) *Journal de l'École Polytechnique*, XVII[e] Cahier, 1815.
(3) Crelle, *Journal fur die mathematik*. Band XII. — Liouville, *Journal de Mathématiques*, tome II, etc.

connus jusqu'alors, et c'est seulement en 1841 que l'illustre Jacobi (1) dans le Mémoire *De formatione et proprietatibus determinantium*, posa les bases d'un traité concernant la théorie des déterminants. A la suite de ce Mémoire, il en parut un autre du même géomètre, *De determinantibus functionalibus*. Dans ce nouveau travail, l'auteur, faisant usage des procédés du calcul différentiel et de quelques propriétés connues de la composition des fonctions, ajouta une partie extrêmement importante à la théorie dont il est question (§ X). On doit encore à Jacobi (2) les premières recherches sur les déterminants *gauches* (§ VIII), lesquelles ont été complétées et étendues par M. Cayley (3) dans deux intéressants Mémoires. Les travaux les plus récents sur les déterminants consistent dans diverses applications de leurs propriétés à l'analyse, à la géométrie, à la mécanique, à la théorie des équations, à la théorie des nombres, etc., applications que l'on doit à MM. Jacobi, Cayley, Sylvester, Cauchy, Hesse, Hermite, Borchardt, Salmon, Malmsteen, Joachimsthal, etc. (4).

---

(1) Crelle, *Journal fur die mathematik*. Band XXII.

(2) Crelle, *Journal fur die mathematik*. Band II. *Ueber die Pfaffsche Integrations-Methode*.

(3) Crelle, *Journal fur die mathematik*. Band XXXII. *U.* XXXVIII.

(4) Jacobi, *Mathematische Werke*. — Cauchy, *Exercices d'A-*

La variété et l'importance des applications de la théorie des déterminants font sentir aux étudiants le désir et le besoin de se procurer des ouvrages où ils puissent trouver exposés les principes de cette branche de l'analyse. Les Mémoires de Jacobi et l'opuscule justement estimé de Spottiswoode (1), *Elementary theorems relating to determinants*, sont les seules sources auxquelles puissent recourir ceux qui s'engagent aujourd'hui dans l'étude de cette théorie. Nous ne pensons donc point faire une chose inopportune en publiant un nouveau livre sur la matière.

---

nalyse et de Physique mathématique. — SALMON, *On the higher plane curves.* — *Journal* de CRELLE. — *Journal* de LIOUVILLE. — *Philosophical Magazine.* — *The Cambridge and Dublin mathematical journal.* — *Annali di Tortolini.*

(1) London, George Bell, 1851.

TABLE DES MATIÈRES.

APPENDICE.

ERRATA.

L'avant-dernière formule de la page 128 doit s'écrire :

$$E_{r,r} = \frac{1}{4}\frac{(y_r)}{f(y_r)};$$

et la dernière de la même page doit s'écrire :

$$\int^n U\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n = \frac{1}{2^n}\int^n \frac{\sqrt{[F'(y_1)F'(y_2)\ldots F'(y_n)]}}{\sqrt{[f(y_1)f(y_2)\ldots f(y_n)]}}\cdot U\,dy_1\,dy_2\ldots dy_n.$$

THÉORIE DES DÉTERMINANTS

ET

LEURS PRINCIPALES APPLICATIONS.

§ I. — *Définitions et notations.*

Le symbole $a_{r,s}$ représente en général une quantité qui change de valeur lorsqu'on fait varier les indices r, s; et l'on suppose ici que ces mêmes indices peuvent recevoir les valeurs 1, 2, 3,..., n.

On nomme *déterminant* l'expression qui résulte de l'agrégat des 1.2.3...n produits que l'on obtient en permutant les indices de toutes les manières possibles dans le produit

$$a_{r_1,s_1}\ a_{r_2,s_2} \ldots a_{r_n,s_n},$$

et appliquant aux mêmes produits des signes déterminés.

Les quantités $a_{r,s}$ se nomment les *éléments* du déterminant; les éléments $a_{r,s}$ et $a_{s,r}$ sont dits *conjugués*, et les éléments $a_{1,1}\, a_{2,2} \ldots a_{n,n}$ sont appelés éléments *principaux*.

La notation généralement adoptée pour représenter les déterminants et de laquelle se sont servis Laplace, Cauchy, Jacobi, n'est autre que l'écriture symbolique de la définition, savoir:

$$\Sigma(\pm a_{1,1}\, a_{2,2} \ldots a_{n,n}).$$

Cette notation a sur les autres l'avantage de la concision; mais lorsqu'on doit effectuer des opérations spéciales sur les éléments du déterminant, ou bien lorsque quelques-uns de ces éléments reçoivent des valeurs particulières, il

sera plus commode d'employer la notation suivante :

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

où apparaissent explicitement tous les éléments.

On dira que les éléments situés les uns au-dessous des autres sont dans une même colonne, et que ceux qui sont placés horizontalement les uns à la suite des autres sont dans une même ligne. Il est évident, d'après la définition, que, si l'on considère un élément quelconque $a_{r,s}$, les divers produits où entre cet élément ne pourront contenir aucun des éléments situés soit dans la colonne, soit dans la ligne dont fait partie $a_{r,s}$.

Un troisième mode de notation dû à M. Sylvester, et qui a quelque analogie avec la méthode antérieurement adoptée par Vandermonde, consiste à exprimer les quantités $a_{r,s}$ au moyen de deux lettres a_r, α_s lesquelles prises séparément, ne représentent ni une quantité, ni un symbole d'opération, mais sont en quelque sorte une simple *apparence* de quantité. Par l'introduction de ces éléments idéaux, l'auteur présente les déterminants sous une forme plus condensée que celle en dernier lieu exposée, en écrivant l'une au-dessous de l'autre les deux séries d'éléments de la manière suivante :

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \ldots a_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 \ldots \alpha_n \end{vmatrix}$$

et la valeur algébrique de ce déterminant sera exprimée par

$$\Sigma \pm a_1 \alpha_{r_1} . a_2 \alpha_{r_2} \ldots a_n \alpha_{r_n},$$

en observant que les quantités $r_1, r_2, \ldots, r_n$ sont différentes entre elles et peuvent recevoir toutes les valeurs $1, 2, 3, \ldots, n$.

L'ordre d'un déterminant est égal au nombre de ses éléments principaux, et conséquemment le déterminant ci-dessus sera du $n^{ième}$ ordre.

§ II. — *Loi de formation des déterminants.*

La loi de formation des déterminants se résume dans la loi des signes que l'on doit attribuer aux différents produits dont l'agrégat constitue précisément ces mêmes déterminants. Cette loi, qui ne diffère pas de la loi ordinaire que l'on rencontre dans la théorie des permutations, assigne à chacun des produits mentionnés le signe *plus* ou le signe *moins* suivant l'imparité ou la parité du nombre des premiers indices que l'on permute dans le produit

$$a_{1,1} . a_{2,2} . . . a_{n,n}$$

(supposé positif) pour obtenir le produit que l'on considère.

Ainsi, par exemple, on aura

$$\Sigma(\pm a_{1,1}\, a_{2,2}\, a_{3,3}) = a_{1,1}\, a_{2,2}\, a_{3,3} + a_{2,1}\, a_{3,2}\, a_{1,3} + a_{3,1}\, a_{1,2}\, a_{2,3} \\ - a_{1,1}\, a_{3,2}\, a_{2,3} - a_{2,1}\, a_{1,2}\, a_{3,3} - a_{3,1}\, a_{2,2}\, a_{1,3}.$$

L'inspection du second membre de cette égalité montre sur-le-champ que

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1}(a_{2,2}\, a_{3,3} - a_{3,2}\, a_{2,3}) - a_{2,1}(a_{1,2}\, a_{3,3} - a_{3,2}\, a_{1,3}) \\ + a_{3,1}(a_{1,2}\, a_{2,3} - a_{2,2}\, a_{1,3}),$$

ou encore

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} - a_{2,1} \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{3,1} \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,2} & a_{2,3} \end{vmatrix}$$

relation qui fait voir de quelle manière on peut arriver à la valeur algébrique d'un déterminant écrit symboliquement

conformément à la seconde méthode indiquée au § I. D'après la loi des signes énoncée plus haut, il est clair qu'on aura sem blablement dans le cas général

$$(1)\quad \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix} = a_{1,1} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} & \ldots & a_{2,n} \\ a_{3,2} & a_{3,3} & \ldots & a_{3,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,2} & a_{n,3} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$- a_{2,1} \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{3,2} & a_{3,3} & \ldots & a_{3,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,2} & a_{n,3} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \ldots - (-1)^n a_{n,1} \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,2} & a_{2,3} & \ldots & a_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \ldots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

et que dans le développement d'un déterminant du $n^{ième}$ ordre un élément quelconque $a_{r,s}$ se trouvera multiplié par le déterminant du $(n-1)^{ième}$ ordre obtenu en effaçant dans le déterminant donné les éléments de la $r^{ième}$ ligne et ceux de la $s^{ième}$ colonne, et attribuant au résultat le signe *plus* ou le signe *moins* suivant que les nombres r et s sont tous les deux pairs ou tous les deux impairs, ou bien l'un pair et l'autre impair.

Exemples. — 1°.

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

$$= x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_3 y_1 - x_1 y_3 + x_2 y_3 - x_3 y_2,$$

expression pour le double de l'aire d'un triangle dont les sommets ont respectivement pour coordonnées x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3.

2°. Si l'on suppose

$$x_1 = a_1 + a_2, \quad x_2 = b_1 + b_2, \quad x_3 = c_1 + c_2,$$

$$y_1 = a_1 a_2, \quad y_2 = b_1 b_2, \quad y_3 = c_1 c_2,$$

il vient

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1+a_2 & a_1 a_2 \\ 1 & b_1+b_2 & b_1 b_2 \\ 1 & c_1+c_2 & c_1 c_2 \end{vmatrix} = (a_1 - b_2)(b_1 - c_2)(c_1 - a_2) + (a_2 - b_1)(b_2 - c_1)(c_2 - a_1),$$

et si a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 représentent les distances de six points situés sur une droite à un point quelconque de la même droite, l'expression précédente égalée à zéro indique que les six points considérés sont en involution.

3°.

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \text{etc.}$$

Si x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2, etc., représentent les coordonnées de quatre points, le déterminant ci-dessus est l'expression analytique de six fois le volume de la pyramide ayant ses sommets en ces quatre points.

§ III. — *Propriétés générales des déterminants.*

De la loi de formation déjà invoquée, il résulte que la valeur et le signe d'un déterminant ne sont pas altérés si les lignes et les colonnes de ce déterminant deviennent respectivement colonnes et lignes. En d'autres termes, on aura l'équation identique

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \ldots a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \ldots a_{2,n} \\ \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} \ldots n_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} \ldots a_{n,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} \ldots a_{n,2} \\ \ldots & \ldots \\ a_{1,n} & a_{2,n} \ldots a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Il est tout aussi évident que si l'on change l'une dans l'autre deux lignes ou bien deux colonnes, tous les termes de la

valeur algébrique du déterminant changent de signe, puisque dans chacun d'eux on effectue une permutation sur les premiers indices de deux éléments, mais la valeur absolue du déterminant reste la même, de façon que l'on a

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}\ldots a_{1,r}\ldots a_{1,s}\ldots a_{1,n} \\ a_{2,1}\ldots a_{2,r}\ldots a_{2,s}\ldots a_{2,n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n,1}\ldots a_{n,r}\ldots a_{n,s}\ldots a_{n,n} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{1,1}\ldots a_{1,s}\ldots a_{1,r}\ldots a_{1,n} \\ a_{2,1}\ldots a_{2,s}\ldots a_{2,r}\ldots a_{2,n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n,1}\ldots a_{n,s}\ldots a_{n,r}\ldots a_{n,n} \end{vmatrix}$$

d'où résulte, quand on suppose égaux les indices r et s,

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}\ldots a_{1,r}\ldots a_{1,r}\ldots a_{1,n} \\ a_{2,1}\ldots a_{2,r}\ldots a_{2,r}\ldots a_{2,n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n,1}\ldots a_{n,r}\ldots a_{n,r}\ldots a_{n,n} \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire que, si deux lignes ou bien deux colonnes d'un déterminant deviennent identiques, le déterminant est égal à zéro. Et le déterminant sera encore nul lorsque les éléments d'une ligne ou ceux d'une colonne seront eux-mêmes identiquement nuls.

Si les éléments d'une ligne ou d'une colonne contiennent un facteur commun, ce facteur apparaîtra dans chacun des produits qui composent la valeur algébrique du déterminant, et l'on pourra, en conséquence, le mettre en évidence comme multiplicateur commun de tous ces produits, de sorte que l'on aura

$$\begin{vmatrix} \alpha a_{1,1} & a_{1,2}\ldots a_{1,n} \\ \alpha a_{2,1} & a_{2,2}\ldots a_{2,n} \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \alpha a_{n,1} & a_{n,2}\ldots a_{n,n} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2}\ldots a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2}\ldots a_{2,n} \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2}\ldots a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Pareillement on pourra multiplier les éléments d'une ligne ou d'une colonne par un même facteur, pourvu qu'on place ce facteur comme diviseur du déterminant.

Si les éléments d'une ligne ou d'une colonne résultent de la somme de deux ou plus de deux quantités, le déterminant sera égal à la somme d'autant de déterminants qu'il y a de ces quantités; et l'on aura par exemple

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}+\alpha_1 & a_{1,2}\ldots a_{1,n} \\ a_{2,1}+\alpha_2 & a_{2,2}\ldots a_{2,n} \\ \ldots & \ldots \\ a_{n,1}+\alpha_n & a_{n,2}\ldots a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2}\ldots a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2}\ldots a_{2,n} \\ \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2}\ldots a_{n,n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & a_{1,2}\ldots a_{1,n} \\ \alpha_2 & a_{2,2}\ldots a_{2,n} \\ \ldots & \ldots \\ \alpha_n & a_{n,2}\ldots a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Observons que, dans le cas où les $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ seraient respectivement égaux aux éléments d'une autre colonne du déterminant primitif, ou n'en différeraient que par un facteur constant, le dernier déterminant du second membre serait égal à zéro.

Exemples. — 1°.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & 0 & x^2 \\ 1 & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{x^2y^2z^2} \begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & xyz^2 & xy^2z \\ y & xyz^2 & 0 & x^2yz \\ z & xy^2z & x^2yz & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix}$$

Si x, y, z sont les longueurs des côtés d'un triangle, ce déterminant représente 16 fois le carré de l'aire du même triangle.

2°. L'identité de deux déterminants suivants est manifeste,

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_0 & s_1 & s_2 \\ s_0 & s_1 & s_2 & s_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix}.$$

Si l'on suppose que $s_0, s_1\ldots$ représentent les sommes des puissances zéro, première, ... des racines de l'équation

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

le déterminant qui précède égalé à zéro, exprime la condition pour que cette équation ait deux racines égales. En effet, ce déterminant, d'après ce qui vient d'être dit, peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & s_0 & s_1+as_0 & s_2+as_1+bs_0 \\ s_0 & s_1+as_0 & s_2+as_1+bs_0 & s_3+as_2+bs_1+cs_0 \\ s_1 & s_2+as_1 & s_3+as_2+bs_1 & s_4+as_3+bs_2+cs_1 \end{vmatrix}$$

et, par conséquent, en ayant égard aux relations connues qui règnent entre les coefficients et les sommes des puissances des racines d'une équation, on aura

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 3 & 2a & b \\ 3 & 2a & b & 0 \\ a & 2b & 3c & 0 \end{vmatrix} = a^2b^2 - 4b^3 - 4a^3c - 27c^2 + 18abc,$$

ce qui, égalé à zéro, exprime précisément la susdite condition.

Considérons l'équation (1), ou cette autre plus générale,

$$P = a_{1,s}\,\alpha_{1,s} + a_{2,s}\,\alpha_{2,s} + \ldots + a_{n,s}\,\alpha_{n,s},$$

où P représente le déterminant, premier membre de la même équation (1), et où l'on a fait, pour abréger,

$$(2)\qquad \alpha_{r,s} = \pm \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2}\ldots & a_{1,s-1} & a_{1,s+1}\ldots\ldots a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2}\ldots\ldots a_{2,s-1} & & a_{2,s+1}\ldots\ldots a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r-1,1} & a_{r-2,2}\ldots a_{r-1,s-1} & & a_{r-1,s+1}\ldots a_{r-1,n} \\ a_{r+1,1} & a_{r+1,2}\ldots a_{r+1,s-1} & & a_{r+1,s+1}\ldots a_{r+1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2}\ldots\ldots a_{n,s-1} & & a_{n,s+1}\ldots\ldots a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Les $\alpha_{1,s}$, $\alpha_{2,s}$, $\alpha_{3,s}\ldots$ étant évidemment indépendants des

éléments $a_{1,s}$, $a_{2,s}$, . . . on aura les équations

$$\alpha_{1,s} = \frac{dP}{da_{1,s}}, \quad \alpha_{2,s} = \frac{dP}{da_{2,s}} \ldots \alpha_{n,s} = \frac{dP}{da_{n,s}},$$

et, par suite,

$$(3) \quad \begin{aligned} P &= a_{1,s}\frac{dP}{da_{1,s}} + a_{2,s}\frac{dP}{da_{2,s}} + \ldots + a_{n,s}\frac{dP}{da_{n,s}} \\ &= a_{r,1}\frac{dP}{da_{r,1}} + a_{r,2}\frac{dP}{da_{r,2}} + \ldots + a_{r,n}\frac{dP}{da_{r,n}}. \end{aligned}$$

En supposant s et r inégaux, l'expression

$$a_{1,r}\frac{dP}{da_{1,s}} + a_{2,r}\frac{dP}{da_{2,s}} + \ldots + a_{n,r}\frac{dP}{da_{n,s}}$$

représentera ce que devient le déterminant P lorsqu'on substitue dans ce déterminant aux éléments $a_{1,s}$, $a_{2,s}$, . . ., les éléments $a_{1,r}$, $a_{2,r}$. . . respectivement. Mais puisque ces deux séries d'éléments constituent individuellement une colonne du déterminant P, l'expression dont il s'agit représentera un déterminant ayant deux colonnes composées d'éléments respectivement identiques, et sera conséquemment égale à zéro. Autrement dit, on aura

$$(4) \quad \begin{aligned} a_{1,r}\frac{dP}{da_{1,s}} + a_{2,r}\frac{dP}{da_{2,s}} + \ldots + a_{n,r}\frac{dP}{da_{n,s}} &= 0, \\ a_{r,1}\frac{dP}{da_{s,1}} + a_{r,2}\frac{dP}{da_{s,2}} + \ldots + a_{r,n}\frac{dP}{da_{s,n}} &= 0. \end{aligned}$$

L'expression $\frac{dP}{da_{r,s}}$ ne contient ni l'élément $a_{r,s}$, ni aucun des éléments qui appartiennent à la ligne ou à la colonne dont cet élément fait partie dans le déterminant P, c'est-à-dire aucun des éléments qui constituent la $r^{ième}$ ligne et la $s^{ième}$ colonne de ce même déterminant. Il en résulte

$$(5) \quad \frac{d^2P}{da_{r,s}^2} = 0, \quad \frac{d^2P}{da_{r,s}\,da_{r_1,s}} = 0, \quad \frac{d^2P}{da_{r,s}\,da_{r,s_1}} = 0.$$

Le déterminant $\frac{d^2P}{da_{r,s}\,da_{r_1,s_1}}$ de l'ordre $n-2$ se déduit du déterminant P, en effaçant dans ce dernier deux lignes et deux colonnes, savoir: la $r^{ième}$ et la $r_1{}^{ième}$ lignes, et la $s^{ième}$ et la $s_1{}^{ième}$ colonnes. Maintenant si dans le déterminant P on change l'une dans l'autre les colonnes $s^{ième}$ et $s_1{}^{ième}$, ce déterminant change de signe, et le déterminant $\frac{d^2P}{da_{r,s}\,da_{r_1,s_1}}$ devient $-\frac{d^2P}{da_{r,s_1}da_{r_1,s}}$; de façon que généralement

$$(6)\qquad \frac{d^2P}{da_{r,s}\,da_{r_1,s_1}} = -\frac{d^2P}{da_{r,s_1}\,da_{r_1,s}}.$$

Les expressions $\frac{dP}{da_{r,1}}$, $\frac{dP}{da_{r,2}}$, . . . , considérées comme des déterminants de l'ordre $n-1$, donnent lieu aux équations suivantes, qui sont analogues à (3):

$$(7)\qquad \begin{cases} \frac{dP}{da_{r,1}} = a_{s,1}\frac{d^2P}{da_{r,1}\,da_{s,1}} + a_{s,2}\frac{d^2P}{da_{r,1}\,da_{s,2}} + \ldots + a_{s,n}\frac{d^2P}{da_{r,1}\,da_{s,n}}, \\ \frac{dP}{da_{r,2}} = a_{s,1}\frac{d^2P}{da_{r,2}da_{s,1}} + a_{s,2}\frac{d^2P}{da_{r,2}da_{s,2}} + \ldots + a_{s,n}\frac{d^2P}{da_{r,2}da_{s,n}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dP}{da_{r,n}} = a_{s,1}\frac{d^2P}{da_{r,n}\,da_{s,1}} + a_{s,2}\frac{d^2P}{da_{r,n}\,da_{s,2}} + \ldots + a_{s,n}\frac{d^2P}{da_{r,n}da_{s,n}}, \end{cases}$$

et l'on suppose que r et s sont inégaux. En substituant ces valeurs dans la seconde (3) et observant qu'en vertu de (5) et (6),

$$\frac{d^2P}{da_{r,1}\,da_{s,1}} = 0, \quad \frac{d^2P}{da_{r,2}da_{s,2}} = 0 \ldots \frac{d^2P}{da_{r,n}da_{s,n}} = 0,$$

$$\frac{d^2P}{da_{r,1}\,da_{s,2}} = -\frac{d^2P}{da_{r,2}\,da_{s,1}}, \quad \frac{d^2P}{da_{r,1}\,da_{s,3}} = -\frac{d^2P}{da_{r,3}\,da_{s,1}}, \text{ etc.},$$

on obtient

$$P = \begin{vmatrix} a_{r,1} & a_{s,1} \\ a_{r,2} & a_{s,2} \end{vmatrix} \frac{d^2P}{da_{r,1}\,da_{s,2}} + \begin{vmatrix} a_{r,1} & a_{s,1} \\ a_{r,3} & a_{s,3} \end{vmatrix} \frac{d^2P}{da_{r,1}\,da_{s,3}} + \ldots$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{r,n-1} & a_{s,n-1} \\ a_{r,n} & a_{s,n} \end{vmatrix} \frac{d^2P}{da_{r,n-1}\,da_{s,n}},$$

ce qu'on peut écrire

$$(8) \qquad P = \Sigma_u \Sigma_v \begin{vmatrix} a_{r,u} & a_{s,u} \\ a_{r,v} & a_{s,v} \end{vmatrix} \frac{d^2P}{da_{r,u}\,da_{s,v}};$$

les indices u et v devant recevoir toutes les valeurs $1, 2, 3, \ldots, n$.

Si l'on multiplie les équations (7) par $a_{s_1,1}\, a_{s_1,2} \ldots a_{s_1,n}$ (s_1 et r étant supposés inégaux) et qu'on somme les résultats, on obtiendra par des transformations analogues

$$(9) \qquad o = \Sigma_u \Sigma_v \begin{vmatrix} a_{s_1,u} & a_{s,u} \\ a_{s_1,v} & a_{s,v} \end{vmatrix} \frac{d^2P}{da_{r,u}\,da_{s,v}}.$$

Dans l'équation

$$(10) \qquad \frac{dP}{da_{r,s}} = a_{s_1,1} \frac{d^2P}{da_{r,s}\,da_{s_1,1}} + a_{s_1,2} \frac{d^2P}{da_{r,s}\,da_{s_1,2}} + \ldots + a_{s_1,n} \frac{d^2P}{da_{r,s}\,da_{s_1,n}},$$

opérons la permutation d'indices indiquée par (6), il viendra

$$(11) \qquad -\frac{dP}{da_{r,s}} = a_{s,1} \frac{d^2P}{da_{r,1}\,da_{s_1,s}} + a_{s,2} \frac{d^2P}{da_{r,2}\,da_{s_1,s}} + \ldots + a_{s,n} \frac{d^2P}{da_{r,n}\,da_{s_1,s}}.$$

Notons encore l'équation suivante analogue à (4) et facile à démontrer :

$$(12) \qquad a_{s_1,1} \frac{d^2P}{da_{r,s}\,da_{r_1,1}} + a_{s_1,2} \frac{d^2P}{da_{r,s}\,da_{r_1,2}} + \ldots + a_{s_1,n} \frac{d^2P}{da_{r,s}\,da_{r_1,n}} = o,$$

où l'on doit supposer r_1, s_1 différents entre eux.

L'équation (8) fait voir comment le déterminant P du $n^{ième}$ ordre peut se déduire d'une somme de produits de déter-

minants du second ordre par des déterminants du $(n-2)^{ième}$ ordre; on verra de la même manière que le déterminant P peut s'exprimer au moyen d'une somme de produits de déterminants du 3e, 4e,... ordre par des déterminants du $(n-3)^{ième}$, $(n-4)^{ième}$,... ordre; et généralement, en supposant que les indices $r_1, r_2, \ldots, r_m$ représentent des nombres entiers tels que

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_m = n,$$

et posant, pour abréger,

$$P_{r_1} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \ldots a_{1,r_1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \ldots a_{2,r_1} \\ \ldots & \ldots \\ a_{r_1,1} & a_{r_1,2} \ldots a_{r_1,r_1} \end{vmatrix}, \quad P_{r_2} = \begin{vmatrix} a_{1,r_1+1} & a_{1,r_1+2} \ldots a_{1,r_2} \\ a_{2,r_1+1} & a_{2,r_1+2} \ldots a_{2,r_2} \\ \ldots & \ldots \\ a_{r_2,r_1+1} & a_{r_2,r_1+2} \ldots a_{r_2,r_2} \end{vmatrix}, \text{etc.},$$

on apercevra sans peine que

$$(13) \qquad P = \Sigma \pm P_{r_1} P_{r_2} \ldots P_{r_m}.$$

Dans cette expression, la caractéristique Σ désigne la somme de tous les produits analogues à celui qu'elle affecte; et ces produits proviennent des facteurs qui ne sont autres que les déterminants obtenus en prenant dans les r_1 premières lignes tous les groupes possibles de r_1 colonnes, dans les r_2 lignes, faisant immédiatement suite aux r_1 premières, tous les groupes possibles de r_2 colonnes, et ainsi de suite, en ayant soin toutefois de ne pas prendre deux fois dans un même produit une même ligne ou une même colonne. Le nombre total des produits ainsi obtenus sera évidemment

$$\frac{1.2.3\ldots n}{1.2.3\ldots r_1 . 1.2.3\ldots r_2 \ldots 1.2.3\ldots r_3 \ldots 1.2.3\ldots r_m}.$$

Les formules (3) et (4) conduisent aisément au groupe

suivant d'équations :

$$a_{1,1}\frac{dP}{da_{1,s_1}}+a_{2,1}\frac{dP}{da_{2,s_1}}+\ldots+a_{n,1}\frac{dP}{da_{n,s_1}}=0,$$

$$a_{1,2}\frac{dP}{da_{1,s_1}}+a_{2,2}\frac{dP}{da_{2,s_1}}+\ldots+a_{n,2}\frac{dP}{da_{n,s_1}}=0,$$

....

$$a_{1,s_1}\frac{dP}{da_{1,s_1}}+a_{2,s_1}\frac{dP}{da_{2,s_1}}+\ldots+a_{n,s_1}\frac{dP}{da_{n,s_1}}=P,$$

....

$$a_{1,n}\frac{dP}{da_{1,s_1}}+a_{2,n}\frac{dP}{da_{2,s_1}}+\ldots+a_{n,n}\frac{dP}{da_{n,s_1}}=0.$$

Multipliant ces équations respectivement par

$$\frac{d^2P}{da_{r,s}\,da_{r_1,1}},\quad \frac{d^2P}{da_{r,s}\,da_{r_1,2}},\ldots,\quad \frac{d^2P}{da_{r,s}\,da_{r_1,s_1}},$$

sommant les résultats et ayant égard aux relations (7), (11), (12), il viendra

$$(14)\qquad \frac{dP}{da_{r,s}}\frac{dP}{da_{r_1,s_1}}-\frac{dP}{da_{r_1,s}}\frac{dP}{da_{r,s_1}}=P\frac{d^2P}{du_{r,s}\,da_{r_1,s_1}},$$

équation qui rentre dans une classe de formules dont il sera traité au § VI. Voir p. 142

Application.

Six points étant donnés sur un plan, déterminer le lieu géométrique d'un septième point tel, que les droites allant de ce point aux six points donnés forment un faisceau en involution.

Soient x, y les coordonnées d'un quelconque des points du lieu ; $x_1, y_1, \ldots, x_6, y_6$ celles des points fixes donnés. En supposant les six droites coupées par une droite quelconque, qu'on prendra pour axe des x, et représentant par $a_1, a_2, \ldots, a_6$ les distances des points d'intersection à l'ori-

gine, l'involution du faisceau sera exprimée par l'équation

(15) $(a_1 - a_4)(a_3 - a_6)(a_5 - a_2) + (a_2 - a_3)(a_4 - a_5)(a_6 - a_1) = 0.$

Or on trouve aisément

$$a_1 = \frac{xy_1 - x_1 y}{y_1 - y}, \quad a_2 = \frac{xy_2 - x_2 y}{y_2 - y}, \text{ etc.,}$$

et, par suite,

$$a_1 - a_4 = \frac{(xy_1 - x_1 y)(y_4 - y) - (xy_4 - x_4 y)(y_1 - y)}{(y_1 - y)(y_4 - y)},$$

expression qui, par la formule (14), se réduit à

$$a_1 - a_4 = \frac{y}{(y_1 - y)(y_4 - y)} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_4 & y_4 \\ 1 & x_1 & y_1 \end{vmatrix}$$

Substituant ces valeurs, on obtient pour l'équation du lieu géométrique cherché,

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_4 & y_4 \\ 1 & x_1 & y_1 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_6 & y_6 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_5 & y_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_5 & y_5 \\ 1 & x_4 & y_4 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_6 & y_6 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation représente évidemment une courbe du troisième ordre, et comme elle est d'ailleurs satisfaite quand on fait $x = x_1, x_2, \ldots, x_6$, $y = y_1, y_2, \ldots, y_6$, la courbe passera par les six points donnés.

§ IV. — *De la résolution des équations algébriques linéaires.*

Les formules trouvées au § III sont d'un grand usage dans la résolution des équations algébriques linéaires. Si l'on considère le système d'équations

$$(16) \quad \begin{cases} a_{1,1} x_1 + a_{1,2} x_2 + \ldots + a_{1,n} x_n = u_1, \\ a_{2,1} x_1 + a_{2,2} x_2 + \ldots + a_{2,n} x_n = u_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n,1} x_1 + a_{n,2} x_2 + \ldots + a_{n,n} x_n = u_n, \end{cases}$$

on obtiendra la valeur d'une quelconque des inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_n$, par exemple de x_s, en multipliant ces équations respectivement par $\frac{dP}{da_{1,s}}, \frac{dP}{da_{2,s}}, \ldots, \frac{dP}{da_{n,s}}$, et ajoutant les résultats obtenus. En effet, dans cette somme tous les coefficients des inconnues, moins celui de x_s, seront égaux à zéro, puisque leur composition est la même que celle du premier membre de la première équation (4), et le coefficient de x_s sera égal à P en vertu de la première (3); on aura donc

$$Px_s = u_1\alpha_{1,s} + u_2\alpha_{2,s} + \ldots + u_n\alpha_{n,s},$$

le symbole $\alpha_{r,s}$ représentant le déterminant (2). Par ce procédé, on formera le groupe

$$(17)\qquad \begin{array}{l} Px_1 = u_1\alpha_{1,1} + u_2\alpha_{2,1} + \ldots + u_n\alpha_{n,1}, \\ Px_2 = u_1\alpha_{1,2} + u_2\alpha_{2,2} + \ldots + u_n\alpha_{n,2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Px_n = u_1\alpha_{1,n} + u_2\alpha_{2,n} + \ldots + n_n\alpha_{n,n}, \end{array}$$

qui fournit immédiatement les valeurs des inconnues. On remarquera que le dénominateur commun de toutes ces valeurs est précisément le déterminant P, propriété qui, signalée pour la première fois par Cramer, peut être considérée comme l'origine des recherches ultérieures des géomètres dans la branche de l'analyse que nous exposons.

Pareillement, si l'on considère le système

$$(18)\qquad \begin{array}{l} a_{1,1}z_1 + a_{2,1}z_2 + \ldots + a_{n,1}z_n = v_1, \\ a_{1,2}z_1 + a_{2,2}z_2 + \ldots + a_{n,2}z_n = v_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1,n}z_1 + a_{2,n}z_2 + \ldots + a_{n,n}z_n = v_n \end{array}$$

[que quelques auteurs nomment *système dérivé* du sys-

tème (16)], on obtiendra

$$P z_1 = v_1 \alpha_{1,1} + v_2 \alpha_{1,2} + \ldots + v_n \alpha_{1,n},$$
$$P z_2 = v_1 \alpha_{2,1} + v_2 \alpha_{2,2} + \ldots + v_n \alpha_{2,n},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$P z_n = v_1 \alpha_{n,1} + v_2 \alpha_{n,2} + \ldots + v_n \alpha_{n,n}.$$

Il est important d'observer que les inconnues des deux systèmes (16) et (18) sont liées par une équation que l'on obtient en multipliant les équations qui précèdent par $u_1, u_2, \ldots, u_n$ respectivement, sommant les résultats et ayant égard à (17); ou bien en multipliant les équations (17) respectivement par $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sommant les résultats et ayant égard aux équations qui précèdent. De l'une ou l'autre façon, on arrivera à

$$(19) \quad u_1 z_1 + u_2 z_2 + \ldots + u_n z_n = v_1 x_1 + v_2 x_2 + \ldots + v_n x_n.$$

Les équations (17) subsistent quels que soient $u_1, u_2, \ldots, u_n$; si donc toutes ces quantités sont égales à zéro et qu'il n'en puisse être de même de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on devra avoir

$$P = 0.$$

Par où l'on voit que cette dernière équation est le résultat de l'élimination des inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_n$ entre les équations

$$(20) \quad \begin{cases} a_{1,1} x_1 + a_{1,2} x_2 + \ldots + a_{1,n} x_n = 0, \\ a_{2,1} x_1 + a_{2,2} x_2 + \ldots + a_{2,n} x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n,1} x_1 + a_{n,2} x_2 + \ldots + a_{n,n} x_n = 0, \end{cases}$$

ou, si l'on veut, le résultat de l'élimination des inconnues $z_1, z_2, \ldots, z_n$ entre les équations (18), quand on y suppose $v_1 = v_2 = \ldots = v_n = 0$.

Si l'on fait

$$u_1 = -a_{1,0} x_0, \quad u_2 = -a_{2,0} x_0, \ldots, \quad u_n = -a_{n,0} x_0,$$

les équations (17) donnent

$$\mathrm{P}x_1 = - x_0(a_{1,0}\alpha_{1,1} + a_{2,0}\alpha_{2,1} + \ldots + a_{n,0}\alpha_{n,1}),$$
$$\mathrm{P}x_2 = - x_0(a_{1,0}\alpha_{1,2} + a_{2,0}\alpha_{2,2} + \ldots + a_{n,0}\alpha_{n,2}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\mathrm{P}x_n = - x_0(a_{1,0}\alpha_{1,n} + a_{2,0}\alpha_{2,n} + \ldots + a_{n,0}\alpha_{n,n}),$$

d'où

(21) $$x_0 : x_1 : x_2 \ldots : x_n$$

$$= \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix} : \pm \begin{vmatrix} a_{1,0} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,0} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,0} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix} : \ldots : \pm \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,0} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,0} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,0} \end{vmatrix}$$

Ces proportions font connaître les valeurs des rapports qui existent entre les $n+1$ inconnues $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, qui entrent dans les équations en nombre n.

(22)
$$a_{1,0}x_0 + a_{1,1}x_1 + \ldots + a_{1,n}x_n = 0,$$
$$a_{2,0}x_0 + a_{2,1}x_1 + \ldots + a_{2,n}x_n = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{n,0}x_0 + a_{n,1}x_1 + \ldots + a_{n,n}x_n = 0.$$

Applications.

1°. En représentant par $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$ les coordonnées d'un point quelconque d'un plan, l'équation d'une conique située dans ce plan sera

$$\varphi = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2eyz + 2fxz + 2hxy = 0.$$

Pour que la droite représentée par l'équation

$$lx + my + nz = 0$$

soit tangente à cette conique, on devra avoir les relations

$$ax_1 + hy_1 + fz_1 - \frac{1}{2}l = 0,$$
$$hx_1 + by_1 + ez_1 - \frac{1}{2}m = 0,$$
$$fx_1 + ey_1 + cz_1 - \frac{1}{2}n = 0,$$
$$lx_1 + my_1 + nz_1 = 0,$$

où x_1, y_1, z_1 sont les coordonnées du point de contact. La condition nécessaire pour que la droite soit tangente à la conique, sera donc

$$(23) \qquad \begin{vmatrix} a & h & f & l \\ h & b & e & m \\ f & e & c & n \\ l & m & n & o \end{vmatrix} = 0.$$

Imaginant une seconde droite

$$l_1 x + m_1 y + n_1 z = 0,$$

la condition pour qu'elle touche la conique sera

$$(24) \qquad \begin{vmatrix} a & h & f & l_1 \\ h & b & e & m_1 \\ f & e & c & n_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 & o \end{vmatrix} = 0.$$

Pour trouver les coordonnées du point de contact, observons qu'en posant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & h & f & l & l_1 \\ h & b & e & m & m_1 \\ f & e & c & n & n_1 \\ l & m & n & o & o \\ l_1 & m_1 & n_1 & o & o \end{vmatrix}$$

et ayant égard à (23), (24), on a les équations

$$l \frac{d\Delta}{dl_1} + m \frac{d\Delta}{dm_1} + n \frac{d\Delta}{dn_1} = 0,$$

$$a \frac{d\Delta}{dl_1} + h \frac{d\Delta}{dm_1} + f \frac{d\Delta}{dn_1} + l\mathrm{H} = 0,$$

$$h \frac{d\Delta}{dl_1} + b \frac{d\Delta}{dm_1} + e \frac{d\Delta}{dn_1} + m\mathrm{H} = 0,$$

$$f \frac{d\Delta}{dl_1} + e \frac{d\Delta}{dm_1} + c \frac{d\Delta}{dn_1} + n\mathrm{H} = 0,$$

dans lesquelles $\frac{d\Delta}{dl_1}$, $\frac{d\Delta}{dm_1}$, $\frac{d\Delta}{dn_1}$ sont les dérivées partielles du déterminant Δ par rapport aux éléments l_1, m_1, n_1 qui constituent la dernière ligne ou bien la dernière colonne. On a fait d'ailleurs

$$H = \pm \begin{vmatrix} a & h & f & l \\ h & b & e & m \\ f & e & c & n \\ l_1 & m_1 & n_1 & o \end{vmatrix}$$

Il suit de là que les coordonnées du point de contact de la première droite avec la conique seront déterminées par les rapports

$$x_1 : y_1 : z_1 = \frac{d\Delta}{dl_1} : \frac{d\Delta}{dm_1} : \frac{d\Delta}{dn_1},$$

et l'on aura semblablement pour les coordonnées du point de contact de la seconde droite avec la conique,

$$x_2 : y_2 : z_2 = \frac{d\Delta}{dl} : \frac{d\Delta}{dm} : \frac{d\Delta}{dn}.$$

Si l'on se souvient que

$$\frac{d\Delta}{dm}\frac{d\Delta}{dn_1} - \frac{d\Delta}{dm_1}\frac{d\Delta}{dn} = \Delta\frac{d^2\Delta}{dm\,dn_1},$$

$$\frac{d\Delta}{dn}\frac{d\Delta}{dl_1} - \frac{d\Delta}{dn_1}\frac{d\Delta}{dl} = \Delta\frac{d^2\Delta}{dn\,dl_1},$$

$$\frac{d\Delta}{dl}\frac{d\Delta}{dm_1} - \frac{d\Delta}{dl_1}\frac{d\Delta}{dm} = \Delta\frac{d^2\Delta}{dl\,dm_1},$$

l'équation de la corde de contact sera

$$\frac{d^2\Delta}{dm\,dn_1}x + \frac{d^2\Delta}{dn\,dl_1}y + \frac{d^2\Delta}{dl\,dm_1}z = 0,$$

ou bien, en désignant par x_0, y_0, z_0 les coordonnées du

point de rencontre des deux tangentes,

$$(25)\quad \begin{cases} (ax_0 + hy_0 + fz_0)\,x + (hx_0 + by_0 + ez_0)\,y \\ + (fx_0 + ey_0 + cz_0)\,z = 0, \end{cases}$$

ou encore

$$x_0 \frac{d\varphi}{dx} + y_0 \frac{d\varphi}{dy} + z_0 \frac{d\varphi}{dz} = 0.$$

La droite que représente cette équation est nommée la *polaire* du point (x_0, y_0, z_0) lequel prend le nom de *pôle*.

En concevant deux autres droites représentées par les équations

$$(26)\quad \begin{array}{l} \lambda x + \mu y + \nu z = 0, \\ \lambda_1 x + \mu_1 y + \nu_1 z = 0, \end{array}$$

et supposant qu'elles touchent la conique, la polaire de leur point d'intersection aura pour équation

$$\begin{vmatrix} a & h & f \\ \lambda & \mu & \nu \\ \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} h & b & e \\ \lambda & \mu & \nu \\ \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} f & e & c \\ \lambda & \mu & \nu \\ \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \end{vmatrix} z = 0.$$

Si l'on désigne par X, Y, Z les coordonnées du point de rencontre des deux polaires, par x_1, y_1, z_1 les coordonnées de la commune intersection des deux droites (26) et que l'on pose, pour abréger,

$$bc - e^2 = \mathrm{A}, \quad ac - f^2 = \mathrm{B}, \quad ab - h^2 = \mathrm{C},$$
$$ef - hc = \mathrm{H}, \quad he - bf = \mathrm{F}, \quad hf - ae = \mathrm{E},$$

on aura

$$\mathrm{A}(y_0 z_1 - y_1 z_0) + \mathrm{H}(x_1 z_0 - x_0 z_1) + \mathrm{F}(x_0 y_1 - x_1 y_0) = k\mathrm{X},$$
$$\mathrm{H}(y_0 z_1 - y_1 z_0) + \mathrm{B}(x_1 z_0 - x_0 z_1) + \mathrm{E}(x_0 y_1 - x_1 y_0) = k\mathrm{Y},$$
$$\mathrm{F}(y_0 z_1 - y_1 z_0) + \mathrm{E}(x_1 z_0 - x_0 z_1) + \mathrm{C}(x_0 y_1 - x_1 y_0) = k\mathrm{Z},$$

k étant une indéterminée. De ces équations, en faisant

$$R = \begin{vmatrix} A & H & F \\ H & B & E \\ F & E & C \end{vmatrix}$$

on déduit

$$y_0 z_1 - y_1 z_0 = \frac{k}{R} \left\{ X(BC - E^2) + Y(EF - HC) + Z(HE - BF) \right\},$$

$$x_1 z_0 - x_0 z_1 = \frac{k}{R} \left\{ X(EF - HC) + Y(AC - F^2) + Z(HF - AE) \right\},$$

$$x_0 y_1 - x_1 y_0 = \frac{k}{R} \left\{ X(HE - BF) + Y(HF - AE) + Z(AB - H^2) \right\}.$$

Si l'on observe qu'en désignant par S le déterminant

$$\begin{vmatrix} a & h & f \\ h & b & e \\ f & e & c \end{vmatrix}$$

on a

$$(BC - E^2) = aS, \quad AC - F^2 = bS, \quad AB - H^2 = cS,$$
$$EF - HC = hS, \quad HE - BF = fS, \quad HF - AE = eS,$$
$$R = S^2 \text{ (*)};$$

il en résultera

$$y_0 z_1 - y_1 z_0 = \frac{k}{S} (aX + hY + fZ),$$

$$z_0 x_1 - z_1 x_0 = \frac{k}{S} (hX + bY + eZ),$$

$$x_0 y_1 - x_1 y_0 = \frac{k}{S} (fX + eY + cZ).$$

Maintenant l'équation de la droite qui passe par les deux pôles, c'est-à-dire par les deux points (x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1), est

$$(y_0 z_1 - y_1 z_0) x + (z_0 x_1 - z_1 x_0) y + (x_0 y_1 - x_1 y_0) z = 0,$$

(*) Ces relations seront démontrées en général au § VI.

elle deviendra donc, en ayant égard aux équations précédentes,

$$(aX+hY+fZ)x+(hX+bY+eZ)y+(fX+eY+cZ)z=0.$$

La droite représentée par cette équation se nomme la *polaire* du point (X, Y, Z); et les deux systèmes composés, l'un du point (x_0, y_0, z_0) et de cette dernière droite sur laquelle ce point est situé, l'autre du point (X, Y, Z) et de la droite (25) sur laquelle ce dernier point est situé, sont dits *polaires réciproques* l'un de l'autre.

2°. On nomme *discriminant* d'une fonction homogène à deux variables le premier membre de l'équation qui résulte de l'élimination de ces variables entre les équations que l'on obtient en égalant à zéro les dérivées partielles du premier ordre de la fonction proposée par rapport à chacune des variables. Soit

$$ax^4+4bx^3y+6cx^2y^2+4dxy^3+ey^4$$

la fonction homogène dont on cherche le discriminant. Égalant à zéro les dérivées partielles du premier ordre de cette fonction par rapport à x et à y, il vient

$$ax^3+3bx^2y+3cxy^2+dy^3=0,$$
$$bx^3+3cx^2y+3dxy^2+ey^3=0.$$

Pour éliminer les variables x, y entre ces équations, nous ferons usage d'une méthode due à M. Sylvester, et qu'il a nommée méthode *dialytique* (*). Si l'on considère les six équations obtenues en multipliant chacune des deux précédentes successivement par x^2, xy, y^2, il est manifeste qu'en regardant les six quantités x^5, x^4y, x^3y^2, x^2y^3, xy^4, y^5 comme les inconnues à éliminer, on a six équations analogues à (20), et que partant le résultat de l'éli-

(*) *Philosophical Magazine*, june 1841.

mination s'obtiendra en égalant à zéro le déterminant des coefficients. Pour rendre évidente cette assertion, écrivons ces six équations de la manière suivante :

$$\begin{array}{l}
ax^5 + 3bx^4y + 3cx^3y^2 + dx^2y^3 + \;.\; + \;.\; = 0,\\
\;.\; + ax^4y + 3bx^3y^2 + 3cx^2y^3 + dxy^4 + \;.\; = 0,\\
\;.\; + \;.\; + ax_3y^2 + 3bx^2y^3 + 3cxy^4 + dy^5 = 0,\\
bx^5 + 3cx^4y + 3dx^3y^2 + ex^2y^3 + \;.\; + \;.\; = 0,\\
\;.\; + bx^4y + 3cx^3y^2 + 3dx^2y^3 + exy^4 + \;.\; = 0,\\
\;.\; + \;.\; + bx^3y^2 + 3cx^2y^3 + 3dxy^4 + ey^5 = 0,
\end{array}$$

et l'on aura, pour le résultat de l'élimination,

$$\begin{vmatrix}
a & 3b & 3c & d & 0 & 0\\
0 & a & 3b & 3c & d & 0\\
0 & 0 & a & 3b & 3c & d\\
b & 3c & 3d & e & 0 & 0\\
0 & b & 3c & 3d & e & 0\\
0 & 0 & b & 3c & 3d & e
\end{vmatrix} = 0.$$

Le premier membre de cette équation est le discriminant de la fonction homogène du quatrième degré à deux variables. La valeur algébrique de ce discriminant a été mise par MM. Boole et Cayley sous la forme très-simple

$$(ae - 4bd + 3c^2)^2 - 27(ace - ad^2 - eb^2 - c^3 + 2bdc)^3.$$

De ce qui vient d'être dit, on conclut sans peine que, en général, le discriminant d'une fonction homogène à deux variables du degré n est une fonction homogène des coefficients du degré $2(n-1)$.

3°. Soit u une fonction homogène du $r^{ième}$ degré des n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. En posant, pour abréger,

$$u_r = \frac{du}{dx_r}, \quad u_{r,s} = \frac{d^2u}{dx_r\,dx_s},$$

on aura, par un théorème connu d'Euler,

$$x_1 u_{1,1} + x_2 u_{1,2} + \ldots + x_n u_{1,n} - (r-1) u_1 = 0,$$
$$x_1 u_{2,1} + x_2 u_{2,2} + \ldots + x_n u_{2,n} - (r-1) u_2 = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_1 u_{n,1} + x_2 u_{n,2} + \ldots + x_n u_{n,n} - (r-1) u_n = 0,$$
$$x_1 u_1 + x_2 u_2 + \ldots + x_n u_n - ru = 0.$$

L'élimination de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ entre ces $(n+1)$ équations donne

$$\begin{vmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \ldots & u_{1,n} & u_1 \\ u_{2,1} & u_{2,2} & \ldots & u_{2,n} & u_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{n,1} & u_{n,2} & \ldots & u_{n,n} & u_n \\ u_1 & u_2 & \ldots & u_n & \frac{r}{r-1} u \end{vmatrix} = 0,$$

d'où

$$\begin{vmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \ldots & u_{1,n} & u_1 \\ u_{2,1} & u_{2,2} & \ldots & u_{2,n} & u_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{n,1} & u_{n,2} & \ldots & u_{n,n} & u_n \\ u_1 & u_2 & \ldots & u_n & 0 \end{vmatrix} \pm \frac{r}{r-1} u \begin{vmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \ldots & u_{1,n} \\ u_{2,1} & u_{2,2} & \ldots & u_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{n,1} & u_{n,2} & \ldots & u_{n,n} \end{vmatrix} = 0.$$

Il suit de là que, pour les valeurs des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ qui rendront nulle la fonction u, le déterminant

$$\begin{vmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \ldots & u_{1,n} & u_1 \\ u_{2,1} & u_{2,2} & \ldots & u_{2,n} & u_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{n,1} & u_{n,2} & \ldots & u_{n,n} & u_n \\ u_1 & u_2 & \ldots & u_n & 0 \end{vmatrix}$$

sera lui-même identiquement nul.

Si l'on suppose $n = 2$, le trinôme

$$u_{1,1} u_2^2 - 2 u_{1,2} u_1 u_2 + u_{2,2} u_1^2,$$

sera nul pour toutes les valeurs de x_1, x_2 qui satisfont à l'équation $u(x_1, x_2) = 0$; ou, géométriquement parlant, si cette dernière équation est supposée représenter une courbe, le rayon de courbure sera infini en chacun des points de cette courbe, c'est-à-dire que l'équation

$$u(x_1, x_2) = 0$$

représentera un faisceau de r droites.

De même l'équation $u(x_1, x_2, x_3) = 0$ représente un cône.

§ V. — *Multiplication et élévation aux puissances des déterminants.*

Considérons deux systèmes d'équations de la forme

$$\begin{aligned}
a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n &= u_1,\\
a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n &= u_2,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n &= u_n;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{1,1}y_1 + c_{2,1}y_2 + \ldots + c_{n,1}y_n &= x_1,\\
c_{1,2}y_1 + c_{2,2}y_2 + \ldots + c_{n,2}y_n &= x_2,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
c_{1,n}y_1 + c_{2,n}y_2 + \ldots + c_{n,n}y_n &= x_n.
\end{aligned}$$

Si de ces deux systèmes on veut déduire les valeurs de $y_1, y_2, \ldots, y_n$ en fonction de $a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots; c_{1,1}, c_{1,2}, \ldots; u_1, u_2, \ldots, u_n$, on peut suivre deux voies différentes. Ou l'on peut substituer dans le premier système les valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ fournies par le second, et résoudre les équations résultantes, ou bien on peut déduire du premier système les valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et, les ayant substituées dans le second, résoudre les équations ainsi obtenues. Les valeurs de $y_1, y_2, \ldots, y_n$ fournies par ces deux mé-

thodes devront être identiques; et l'équation que l'on formera en égalant entre eux les dénominateurs de ces mêmes valeurs sera précisément la traduction analytique de la règle qui gouverne la multiplication des déterminants.

Substituons, dans le premier système, les valeurs de x_1, $x_2, \ldots, x_n$ fournies par le second; en faisant, pour abréger,

$$
(27) \quad \begin{array}{l}
a_{1,1}c_{1,1} + a_{1,2}c_{1,2} + \ldots + a_{1,n}c_{1,n} = h_{1,1}, \\
a_{1,1}c_{2,1} + a_{1,2}c_{2,2} + \ldots + a_{1,n}c_{2,n} = a_{1,2}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{1,1}c_{n,1} + a_{1,2}c_{n,2} + \ldots + a_{1,n}c_{n,n} = h_{1,n}, \\
\\
a_{2,1}c_{1,1} + a_{2,2}c_{1,2} + \ldots + a_{2,n}c_{1,n} = h_{2,1}, \\
a_{2,1}c_{2,1} + a_{2,2}c_{2,2} + \ldots + a_{2,n}c_{2,n} = h_{2,2}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{2,1}c_{n,1} + a_{2,2}c_{n,2} + \ldots + a_{2,n}c_{n,n} = h_{2,n}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{n,1}c_{1,1} + a_{n,2}c_{1,2} + \ldots + a_{n,n}c_{1,n} = h_{n,1}, \\
a_{n,1}c_{2,1} + a_{n,2}c_{2,2} + \ldots + a_{n,n}c_{2,n} = h_{n,2}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{n,1}c_{n,1} + a_{n,2}c_{n,2} + \ldots + a_{n,n}c_{n,n} = h_{n,n},
\end{array}
$$

on obtiendra

$$
\begin{array}{l}
h_{1,1}y_1 + h_{1,2}y_2 + \ldots + h_{1,n}y_n = u_1, \\
h_{2,1}y_1 + h_{2,2}y_2 + \ldots + h_{2,n}y_n = u_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
h_{n,1}y_1 + h_{n,2}y_2 + \ldots + h_{n,n}y_n = u_n,
\end{array}
$$

et si de là on déduit les valeurs de $y_1, y_2, \ldots, y_n$, ces valeurs auront pour dénominateur commun le déterminant

$$
(28) \qquad R = \pm \begin{vmatrix}
h_{1,1} & h_{1,2} \ldots & h_{1,n} \\
h_{2,1} & h_{2,2} \ldots & h_{2,n} \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
h_{n,1} & h_{n,2} \ldots & h_{n,n}
\end{vmatrix}
$$

Si, au contraire, on tire du premier système les valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, leur dénominateur commun sera

$$P = \pm \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \ldots a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \ldots a_{2,n} \\ \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} \ldots a_{n,n} \end{vmatrix}$$

et lorsqu'on aura substitué ces valeurs dans le second système pour en déduire celles de $y_1, y_2, \ldots, y_n$, le dénominateur commun de ces dernières valeurs sera évidemment le produit du déterminant qui précède par le déterminant

$$(29) \qquad Q = \pm \begin{vmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} \ldots c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} \ldots c_{2,n} \\ \ldots & \ldots \\ c_{n,1} & c_{n,2} \ldots c_{n,n} \end{vmatrix}$$

Du rapprochement des valeurs $y_1, y_2, \ldots, y_n$ obtenues dans l'un et l'autre cas, résulte immédiatement

$$(30) \qquad R = P.Q,$$

ce qui est précisément la formule cherchée pour la multiplication des déterminants. En jetant les yeux sur les équations (27), il devient manifeste que les éléments qui constituent une même ligne du déterminant-produit ne sont autres que les sommes des produits des éléments d'une ligne du facteur P par les éléments des diverses lignes du facteur Q. Il est évident que le déterminant-produit pourra encore s'obtenir en effectuant ces multiplications des éléments des déterminants-facteurs, soit par colonnes, soit par lignes et colonnes; ces diverses manières de procéder changeront bien la forme du déterminant-produit, mais sa valeur algébrique sera toujours la même.

Ainsi, par exemple, le produit des déterminants binaires

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$$

pourra s'écrire des quatre manières suivantes :

$$\begin{vmatrix} a\alpha + b\beta & a\gamma + b\delta \\ c\alpha + d\beta & c\gamma + d\delta \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a\alpha + c\gamma & a\beta + c\delta \\ b\alpha + d\gamma & b\beta + d\delta \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a\alpha + c\beta & a\gamma + c\delta \\ b\alpha + d\beta & b\gamma + d\delta \end{vmatrix}$$

Si les éléments du déterminant P sont respectivement égaux aux éléments du déterminant Q, l'équation (30) donnera

$$R = P^2,$$

et les éléments du déterminant R seront fournis par les équations

$$a_{r,1}^2 + a_{r,2}^2 + \ldots + a_{r,n}^2 = h_{r,r},$$

$$a_{r,1}\, a_{s,1} + a_{r,2}\, a_{s,2} + \ldots + a_{r,n}\, a_{s,n} = h_{r,s},$$

où les indices r, s doivent recevoir toutes les valeurs 1, 2, . . ., n.

Il est important d'observer que dans un déterminant, carré d'un autre déterminant, les éléments conjugués sont identiques entree ux.

Applications.

1°. L'équation du troisième degré que l'on rencontre, dans la Géométrie quand on veut déterminer les axes principaux d'une surface du second ordre, dans la Mécanique quand on cherche les axes des moments principaux d'inertie d'un corps, dans la Physique mathématique quand on désire connaître les forces principales d'élasticité ou les axes de l'ellipsoïde d'élasticité, etc., peut se mettre sous la forme

d'un déterminant de la manière suivante :

$$f(-\lambda) = \begin{vmatrix} a-\lambda & \gamma & \beta \\ \gamma & b-\lambda & \alpha \\ \beta & \alpha & c-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Les racines de cette équation sont réelles. Cette proposition, déjà tablie par MM. Cauchy, Kummer, Borchardt, Jacobi, vient de recevoir tout récemment de M. Sylvester (*) une nouvelle démonstration très-simple et très-élégante, fondée sur la règle relative à la multiplication des déterminants.

En multipliant le premier membre de cette équation par le déterminant $f(\lambda)$, on obtient effectivement

$$\begin{vmatrix} A-\lambda^2 & F & E \\ F & B-\lambda^2 & D \\ E & D & C-\lambda^2 \end{vmatrix}$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$\begin{aligned} a^2+\beta^2+\gamma^2 &= A, & \alpha\beta+\gamma(a+b) &= F, \\ b^2+\alpha^2+\gamma^2 &= B, & \alpha\gamma+\beta(a+c) &= E, \\ c^2+\alpha^2+\beta^2 &= C, & \beta\gamma+\alpha(b+c) &= D, \end{aligned}$$

on a donc

$$-f(\lambda)f(-\lambda) = \lambda^6 - L\lambda^4 + M\lambda^2 - N,$$

et l'on observera que les coefficients L, M, N sont positifs, ces coefficients pouvant aisément être mis sous la forme

$$\begin{aligned} L &= a^2+b^2+c^2+2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2, \\ M &= (ab-\gamma^2)^2+(ac-\beta^2)^2+(bc-\alpha^2)^2 \\ &\quad + 2(a\alpha-\beta\gamma)^2+2(b\beta-\alpha\gamma)^2+(c\gamma-\alpha\beta)^2, \end{aligned}$$

$$N = \begin{vmatrix} a & \gamma & \beta \\ \gamma & b & \alpha \\ \beta & \alpha & c \end{vmatrix}^2$$

(*) *Philosophical Magazine*, 1852.

Si l'on fait

$$a = a_1 + p, \quad b = b_1 + p, \quad c = c_1 + p, \quad \lambda = \lambda_1 + p,$$

la fonction $f(-\lambda)$ deviendra

$$\varphi(-\lambda_1) = \begin{vmatrix} a_1 - \lambda_1 & \gamma & \beta \\ \gamma & b_1 - \lambda_1 & \alpha \\ \beta & \alpha & c_1 - \lambda_1 \end{vmatrix}$$

et l'équation $\varphi(-\lambda_1)\,\varphi(\lambda_1) = 0$ sera de la forme

$$\lambda_1^6 - L_1\lambda_1^4 + M_1\lambda_1^2 - N_1 = 0,$$

les coefficients L_1, M_1, N_1 étant positifs. En lui appliquant la règle des signes de Descartes, on reconnaîtra qu'aucune des valeurs de λ_1^2 ne peut être négative, c'est-à-dire qu'on ne pourra pas avoir $(\lambda - p)^2 = -q^2$, et, par suite, $\lambda = p + q\sqrt{-1}$. Il est donc démontré que les racines de l'équation $f(-\lambda) = 0$ sont essentiellement réelles.

Observons que cette démonstration, comme celles de MM. Jacobi et Borchardt, s'étend aux équations du $n^{ième}$ degré qui ont la même forme, ainsi que nous le verrons dans la suite.

2°. Soient $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ les cosinus des angles que trois droites issues d'un même point forment avec trois axes rectangulaires; et $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ les angles que ces droites comprennent entre elles. On aura les relations connues

$$\begin{aligned} \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 &= 1, & \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 &= \cos\omega_3, \\ \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 &= 1, & \alpha_1\alpha_3 + \beta_1\beta_3 + \gamma_1\gamma_3 &= \cos\omega_2, \\ \alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 &= 1, & \alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3 &= \cos\omega_1, \end{aligned}$$

et, par suite,

$$(31) \qquad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 1 & \cos\omega_3 & \cos\omega_2 \\ \cos\omega_3 & 1 & \cos\omega_1 \\ \cos\omega_2 & \cos\omega_1 & 1 \end{vmatrix}$$

Or, en représentant par a, b, c les cosinus des angles que fait avec les axes la perpendiculaire au plan de deux droites, la seconde et la troisième par exemple, on a, comme on sait,

$$a = \pm \frac{\beta_2 \gamma_3 - \beta_3 \gamma_2}{\sin \omega_1}, \quad b = \pm \frac{\alpha_3 \gamma_2 - \alpha_2 \gamma_3}{\sin \omega_1}, \quad c = \pm \frac{\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2}{\sin \omega_1},$$

$$a\alpha_1 + b\beta_1 + c\gamma_1 = \sin \omega_2 \sin \theta_3 = \sin \omega_3 \sin \theta_2,$$

θ_1, θ_2, θ_3 désignant les angles dièdres compris entre les plans dont les intersections communes sont respectivement la première, la deuxième et la troisième droite. En substituant ces valeurs dans l'équation (31), il viendra

$$\sin \omega_1 \sin \omega_2 \sin \theta_3 = \sin \omega_1 \sin \omega_3 \sin \theta_2 =$$
$$\pm \sqrt{(1 - \cos^2 \omega_1 - \cos^2 \omega_2 - \cos^2 \omega_3 + 2 \cos \omega_1 \cos \omega_2 \cos \omega_3)}.$$

V. p. 147

3°. En s'appuyant sur la multiplication des déterminants, on peut obtenir quelques transformations de déterminants, qui sont utiles dans un grand nombre de recherches. Nous donnerons deux exemples de semblables transformations.

Si le déterminant P est multiplié par le déterminant

$$S = \begin{vmatrix} \alpha_1 & a_{2,1} & 0 & \ldots & 0 \\ \alpha_2 & -a_{1,1} & a_{3,1} & \ldots & 0 \\ \alpha_3 & 0 & -a_{2,1} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_n & 0 & \ldots & 0 & -a_{n-1,1} \end{vmatrix}$$

et que l'on suppose que les indéterminées $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ vérifient les n équations

$$\alpha_1 a_{1,1} + \alpha_2 a_{2,1} + \ldots + \alpha_n a_{n,1} = 1,$$
$$\alpha_1 a_{1,2} + \alpha_2 a_{2,2} + \ldots + \alpha_n a_{n,2} = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\alpha_1 a_{1,n} + \alpha_2 a_{2,n} + \ldots + \alpha_n a_{n,n} = 0,$$

le déterminant-produit sera

$$
I = \begin{vmatrix}
a_{1,2}\, a_{2,1} - a_{1,1}\, a_{2,2}, & a_{1,3}\, a_{2,1} - a_{1,1}\, a_{2,3}, & \ldots & a_{1,n}\, a_{2,1} - a_{1,1}\, a_{2,n} \\
a_{2,2}\, a_{3,1} - a_{2,1}\, a_{3,2}, & a_{2,3}\, a_{3,1} - a_{2,1}\, a_{3,3}, & \ldots & a_{2,n}\, a_{3,1} - a_{2,1}\, a_{3,n} \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\
a_{n-1,2}\, a_{n,1} - a_{n-1,1}\, a_{n,2}, & a_{n-1,3}\, a_{n,1} - a_{n-1,1}\, a_{n,3}, & \ldots & a_{n-1,n}\, a_{n,1} - a_{n-1,1}\, a_{n,n}
\end{vmatrix}
$$

Maintenant en observant que

$$S = (-1)^{n-1} a_{2,1}\, a_{3,1} \ldots a_{n-1,1},$$

on aura

$$I = (-1)^{n-1} a_{2,1}\, a_{3,1} \ldots a_{n-1,1}\, P.$$

L'utilité de cette formule vient d'être mise en évidence par M. Hermite (*) dans une recherche sur la théorie des nombres.

Comme cas particulier de cette même formule, on a

$$
\begin{vmatrix}
\dfrac{x_1 - x_2}{a} & \dfrac{y_1 - y_2}{b} \\[2ex]
\dfrac{x_2 - x_3}{a} & \dfrac{y_2 - y_3}{b}
\end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix}
1 & \dfrac{x_1}{a} & \dfrac{y_1}{b} \\[2ex]
1 & \dfrac{x_2}{a} & \dfrac{y_2}{b} \\[2ex]
1 & \dfrac{x_3}{a} & \dfrac{y_3}{b}
\end{vmatrix}
$$

équation dont le second membre est égal à $\pm \frac{2A}{ab}$, A étant l'aire du triangle qui aurait pour sommets les trois points (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) d'une ellipse aux axes $2a$, $2b$. Si maintenant λ, μ, ν désignent les longueurs des côtés du triangle, et l, m, n les demi-diamètres de l'ellipse respectivement parallèles à ces côtés, en élevant au carré les deux

(*) *Journal* de M. Liouville, tome XIV.

membres de l'équation précédente, il vient

$$\begin{vmatrix} \frac{\lambda^2}{l^2}, & \frac{1}{2}\left(\frac{\mu^2}{m^2}-\frac{\lambda^2}{l^2}-\frac{\nu^2}{n^2}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\mu^2}{m^2}-\frac{\lambda^2}{l^2}-\frac{\nu^2}{n^2}\right), & \frac{\nu^2}{n^2} \end{vmatrix} = \frac{4A^2}{a^2b^2},$$

d'où

$$A=\frac{ab}{4}\sqrt{\left\{\left(\frac{\lambda}{l}+\frac{\mu}{m}+\frac{\nu}{n}\right)\left(\frac{\lambda}{l}-\frac{\mu}{m}+\frac{\nu}{n}\right)\left(\frac{\lambda}{l}+\frac{\mu}{m}-\frac{\nu}{n}\right)\left(-\frac{\lambda}{l}+\frac{\mu}{m}+\frac{\nu}{n}\right)\right\}}.$$

Comme second exemple de transformation des déterminants, nous démontrerons un théorème énoncé par M. Sylvester (*) et dont le même auteur a fait diverses applications géométriques.

THÉORÈME. — La valeur du déterminant

(32) $$\Delta = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} & 1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

est égale à celle du déterminant

$$H = \begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \ldots & A_{1,n} & 1 \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \ldots & A_{2,n} & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \ldots & A_{n,n} & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

dans lequel

$$A_{r,s} = a_{r,s} + h_r + k_s,$$

$h_1, h_2, \ldots; k_1, k_2, \ldots,$ étant deux séries de quantités prises arbitrairement.

(*) *Philosophical Magazine*, 1852.

En effet, en multipliant le déterminant (32) par le suivant :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & k_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & k_2 \\ \ldots & & & & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & k_n \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

et effectuant la multiplication par lignes, on obtient

$$\pm\Delta = \begin{vmatrix} a_{1,1}+k_1 & a_{1,2}+k_2 & \ldots & 1 \\ a_{2,1}+k_1 & a_{2,2}+k_2 & \ldots & 1 \\ \ldots & & & \\ a_{n,1}+k_1 & a_{n,2}+k_2 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 0 \end{vmatrix}$$

Multipliant maintenant ce résultat par le determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & & & & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ h_1 & h_2 & \ldots & h_n & 1 \end{vmatrix}$$

et effectuant le produit par colonnes, il viendra

$$\Delta = H,$$

comme on voulait précisément le démontrer.

L'équation

$$PQ = R,$$

différentiée successivement par rapport à $a_{r,1}$, $a_{r,2}$, ..., $a_{r,n}$ donne, en ayant égard aux équations (27),

$$Q\frac{dP}{da_{r,1}} = \frac{dR}{dh_{r,1}}c_{1,1} + \frac{dR}{dh_{r,2}}c_{2,1} + \ldots + \frac{dR}{dh_{r,n}}c_{n,1},$$

$$Q\frac{dP}{da_{r,2}} = \frac{dR}{dh_{r,1}}c_{1,2} + \frac{dR}{dh_{r,2}}c_{2,2} + \ldots + \frac{dR}{dh_{r,n}}c_{n,2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$Q\frac{dP}{da_{r,n}} = \frac{dR}{dh_{r,1}}c_{1,n} + \frac{dR}{dh_{r,2}}c_{2,n} + \ldots + \frac{dR}{dh_{r,n}}c_{n,n}.$$

Multipliant ces équations par $\frac{dQ}{dc_{s,1}}, \frac{dQ}{dc_{s,2}}, \ldots, \frac{dQ}{dc_{s,n}}$, et faisant la somme des résultats, on a

$$(33) \qquad \frac{dP}{da_{r,1}}\frac{dQ}{dc_{s,1}} + \frac{dP}{da_{r,2}}\frac{dQ}{dc_{s,2}} + \ldots + \frac{dP}{da_{r,n}}\frac{dQ}{dc_{s,n}} = \frac{dR}{dh_{r,s}},$$

en se rappelant que l'expression

$$c_{r,1}\frac{dQ}{dc_{s,1}} + c_{r,2}\frac{dQ}{dc_{s,2}} + \ldots + c_{r,n}\frac{dQ}{dc_{s,n}},$$

d'après ce qui a été démontré au § III, est nulle ou égale à Q, suivant que les indices r, s ont des valeurs différentes ou des valeurs égales.

Si les éléments du déterminant P sont respectivement égaux à ceux du déterminant Q, la formule (33) donne

$$(34) \qquad \frac{dP}{da_{r,1}}\frac{dP}{da_{s,1}} + \frac{dP}{da_{r,2}}\frac{dP}{da_{s,2}} + \ldots + \frac{dP}{da_{r,n}}\frac{dP}{da_{s,n}} = \frac{dR}{dh_{r,s}},$$

d'où, en particulier, si $r = s$,

$$(35) \qquad \left(\frac{dP}{da_{r,1}}\right)^2 + \left(\frac{dP}{da_{r,2}}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{dP}{da_{r,n}}\right)^2 = \frac{dR}{dh_{r,r}}.$$

Exemple :

$$(\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2)^2 + (\gamma_2\alpha_1 - \gamma_1\alpha_2)^2 + (\beta_2\gamma_1 - \beta_1\gamma_2)^2$$
$$= (\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2)(\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2) - (\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2)^2.$$

Il est évident que par la différentiation on peut obtenir d'autres relations entre les déterminants P, Q, R; nous noterons seulement les deux suivantes. Différentions l'équation

$$(36) \qquad Q\frac{dP}{da_{r,s}} = \frac{dR}{dh_{r,1}}c_{1,s} + \frac{dR}{da_{r,2}}c_{2,s} + \ldots + \frac{dR}{dh_{r,n}}c_{n,s},$$

par rapport à c_{r_1,s_1}, et l'équation

$$Q\frac{dP}{da_{r,s_1}} = \frac{dR}{dh_{r,1}}c_{1,s_1} + \frac{dR}{dh_{r,2}}c_{2,s_1} + \ldots + \frac{dR}{dh_{r,n}}c_{n,s_1},$$

par rapport à $c_{r_1,s}$; en soustrayant les résultats, il vient

$$(37)\qquad \frac{dP}{da_{r,s}}\frac{dQ}{dc_{r_1,s_1}} - \frac{dP}{da_{r,s_1}}\frac{dQ}{dc_{r_1,s}} = \Sigma_u \Sigma_v \begin{vmatrix} a_{u,s_1} & a_{u,s} \\ c_{v,s_1} & c_{v,s} \end{vmatrix} \frac{d^2R}{dh_{r,v}\, dh_{u,r_1}},$$

où l'on doit attribuer à u, v toutes les valeurs $1, 2, \ldots, n$.

En différentiant (36) par rapport à a_{r_1,s_1} et se rappelant les équations (5) et (6), on a

$$(38)\qquad Q\frac{d^2P}{da_{r,s}\, da_{r_1,s_1}} = \Sigma_u \Sigma_v \begin{vmatrix} c_{u,s_1} & c_{u,s} \\ c_{v,s_1} & c_{v,s} \end{vmatrix} \frac{d^2R}{dh_{r,v}\, dh_{r_1,u}}.$$

Si l'on suppose que les éléments du déterminant P sont respectivement identiques à ceux du déterminant Q, on a

$$h_{u,r_1} = h_{r_1,u},$$

et, par suite, en comparant les deux équations (37), (38), on retrouve l'équation (14) établie au § III.

Considérons les deux systèmes d'équations

$$\begin{aligned}
c_{1,1}\frac{dP}{da_{r,1}} + c_{1,2}\frac{dP}{da_{r,2}} + \ldots + c_{1,n}\frac{dP}{da_{r,n}} &= H_{r,1}, \\
c_{2,1}\frac{dP}{da_{r,1}} + c_{2,2}\frac{dP}{da_{r,2}} + \ldots + c_{2,n}\frac{dP}{da_{r,n}} &= H_{r,2}, \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots \\
c_{n,1}\frac{dP}{da_{r,1}} + c_{n,2}\frac{dP}{da_{r,2}} + \ldots + c_{n,n}\frac{dP}{da_{r,n}} &= H_{r,n},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{r,1}\frac{dQ}{dc_{1,1}} + a_{r,2}\frac{dQ}{dc_{1,2}} + \ldots + a_{r,n}\frac{dQ}{dc_{1,n}} &= K_{r,1}, \\
a_{r,1}\frac{dQ}{dc_{2,1}} + a_{r,2}\frac{dQ}{dc_{2,2}} + \ldots + a_{r,n}\frac{dQ}{dc_{2,n}} &= K_{r,2}, \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots \\
a_{r,1}\frac{dQ}{dc_{n,1}} + a_{r,2}\frac{dQ}{dc_{n,2}} + \ldots + a_{r,n}\frac{dQ}{dc_{n,n}} &= K_{r,n}.
\end{aligned}$$

En multipliant les équations du premier système respecti-

vement par $\frac{dQ}{dc_{1,1}}, \frac{dQ}{dc_{2,1}}, \ldots, \frac{dQ}{dc_{n,1}}$, et ajoutant les résultats, on a

$$Q\frac{dP}{da_{r,1}} = H_{r,1}\frac{dQ}{dc_{1,1}} + H_{r,2}\frac{dQ}{dc_{2,1}} + \ldots + H_{r,n}\frac{dQ}{dc_{n,1}},$$

et l'on obtient d'une manière analogue

$$Q\frac{dP}{da_{r,2}} = H_{r,1}\frac{dQ}{dc_{1,2}} + H_{r,2}\frac{dQ}{dc_{2,2}} + \ldots + H_{r,n}\frac{dQ}{dc_{n,2}},$$

....

$$Q\frac{dP}{da_{r,n}} = H_{r,1}\frac{dQ}{dc_{1,n}} + H_{r,2}\frac{dQ}{dc_{2,n}} + \ldots + H_{r,n}\frac{dQ}{dc_{n,n}}.$$

Ces nouvelles équations multipliées respectivement par $a_{r,1}\, a_{r,2} \ldots a_{r,n}$, puis ajoutées, donnent, en ayant égard au second système,

$$(39) \qquad PQ = H_{r,1}K_{r,1} + H_{r,2}K_{r,2} + \ldots + H_{r,n}K_{r,n},$$

et ces mêmes équations multipliées par $a_{s,1}\, a_{s,2} \ldots a_{s,n}$, puis ajoutées, donnent

$$o = H_{r,1}K_{s,1} + H_{r,2}K_{s,2} + \ldots + H_{r,n}K_{s,n}.$$

Les $H_{r,1}$, $H_{r,2}$, .. $K_{s,1}$, $K_{s,2}$ ... sont évidemment des déterminants du $n^{ième}$ ordre.

Applications.

1°. Imaginons un tétraèdre rapporté à trois arcs rectangulaires ayant leur origine au centre de gravité de l'une des faces. Soient a, b, c les aires des autres trois faces, $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; α_2, β_2; γ_2; $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ les cosinus des angles que les perpendiculaires abaissées de l'origine sur les plans de ces faces forment avec les demi-axes positifs des coordonnées. Soient enfin x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3 les coordonnées des centres de gravité des mêmes faces, et v le volume du tétraèdre.

Par un théorème connu dû à M. Cauchy, on a les neuf

équations

$$(40)\quad \begin{aligned}
&a\alpha_1 x_1 + b\alpha_2 x_2 + c\alpha_3 x_3 = v,\\
&a\alpha_1 y_1 + b\alpha_2 y_2 + c\alpha_3 y_3 = 0,\\
&a\alpha_1 z_1 + b\alpha_2 z_2 + c\alpha_3 z_3 = 0;\\[1em]
&a\beta_1 x_1 + b\beta_2 x_2 + c\beta_3 x_3 = 0,\\
&a\beta_1 y_1 + b\beta_2 y_2 + c\beta_3 y_3 = v,\\
&a\beta_1 z_1 + b\beta_2 z_2 + c\beta_3 z_3 = 0;\\[1em]
&a\gamma_1 x_1 + b\gamma_2 x_2 + c\gamma_3 x_3 = 0,\\
&a\gamma_1 y_1 + b\gamma_2 y_2 + c\gamma_3 y_3 = 0,\\
&a\gamma_1 z_1 + b\gamma_2 z_2 + c\gamma_3 z_3 = v.
\end{aligned}$$

En posant

$$P = \begin{vmatrix} a\alpha_1 & b\alpha_2 & c\alpha_3 \\ a\beta_1 & b\beta_2 & c\beta_3 \\ a\gamma_1 & b\gamma_2 & c\gamma_3 \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

$$Q = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

on a

$$PQ = v^3.$$

Maintenant, d'après une formule connue,

$$P = \frac{9}{2} v^2,$$

et si u désigne le volume du tétraèdre qui aurait ses sommets aux centres de gravité des faces de la pyramide donnée, on a

$$Q = 6u;$$

par conséquent

$$v = 27u.$$

Les équations (39) donnent ici

$$ax = \frac{dR}{d\alpha_1}\frac{v}{R}, \quad ay_1 = \frac{dR}{d\beta_1}\frac{v}{R}, \quad az_1 = \frac{dR}{d\gamma_1}\frac{v}{R}, \text{ etc.,}$$

R étant égal à $\frac{P}{abc}$. On déduit de là

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2=\frac{v^2}{a^2 R^2}\left\{\left(\frac{dR}{d\alpha_1}\right)^2+\left(\frac{dR}{d\beta_1}\right)^2+\left(\frac{dR}{d\gamma_1}\right)^2\right\},$$

et, par suite,

$$l=\frac{2}{9}\frac{bc}{v}\sin\omega,$$

l désignant la longueur de l'une des arêtes du second tétraèdre, et ω l'angle dièdre compris entre les faces aux aires b, c. Mais si λ représente la longueur de l'arête opposée à la commune intersection de ces mêmes faces, on a

$$v=\frac{2}{3}\frac{bc}{\lambda}\sin\omega,$$

donc

$$l=\frac{1}{3}\lambda.$$

2°. Ayant fait

$$P=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \qquad Q=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

on a

$$PQ=\begin{vmatrix} x_1 y_1 z_1 \\ a_1 b_1 c_1 \\ x_3 y_3 z_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x_2 y_2 z_2 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_1 y_1 z_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ x_3 y_3 z_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ x_2 y_2 z_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_1 y_1 z_1 \\ a_3 b_3 c_3 \\ x_3 y_3 z_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ x_2 y_2 z_2 \end{vmatrix}$$

$$0=\begin{vmatrix} x_1 y_1 z_1 \\ a_1 b_1 c_1 \\ x_3 y_3 z_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x_1 y_1 z_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_1 y_1 z_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ x_3 y_3 z_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ x_1 y_1 z_1 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_1 y_1 z_1 \\ a_3 b_3 c_3 \\ x_3 y_3 z_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ x_1 y_1 z_1 \end{vmatrix}$$

Si l'on suppose que $\frac{x_1}{z_1}$, $\frac{y_1}{z_1}$; $\frac{x_2}{z_2}$, $\frac{y_2}{z_2}$; $\frac{x_3}{z_3}$, $\frac{y_3}{z_3}$ sont les coordonnées de trois points A, B, C, et $\frac{a_1}{c_1}$, $\frac{b_1}{c_1}$, etc., celles de

trois autres points a, b, c, les équations précédentes équivalent à la propriété géométrique

$$ABC.abc = ACa.Bbc + ACb.Bac + ACc.Bab,$$
$$0 = ACa.Abc + ACb.Aac + ACc.Aab,$$

ABC, *abc*, etc., désignant les aires des triangles ABC, *abc*, etc.

§ VI. — *Déterminants à éléments réciproques ou déterminants de déterminants.*

En représentant par P le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} \, a_{1,2} \ldots a_{1,n} \\ a_{2,1} \, a_{2,2} \ldots a_{2,n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n,1} \, a_{n,2} \ldots a_{n,n} \end{vmatrix}$$

et faisant, pour abréger, $\alpha_{r,s} = \dfrac{dP}{da_{r,s}}$, on nomme déterminant à *éléments réciproques* correspondant au déterminant P le déterminant suivant :

$$(41) \qquad S = \begin{vmatrix} \alpha_{1,1} \, \alpha_{1,2} \ldots \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} \, \alpha_{2,2} \ldots \alpha_{2,n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{n,1} \, \alpha_{n,2} \ldots \alpha_{n,n} \end{vmatrix}$$

On sait (§ III) qu'entre les éléments du déterminant P et ceux du déterminant S, il existe les relations

$$(42) \qquad \begin{aligned} a_{r,1}\alpha_{r,1} + a_{r,2}\alpha_{r,2} + \ldots + a_{r,n}\alpha_{r,n} &= P, \\ a_{r,1}\alpha_{s,1} + a_{r,2}\alpha_{s,2} + \ldots + a_{r,n}\alpha_{s,n} &= 0, \end{aligned}$$

par conséquent, en multipliant entre eux les déterminants P, S, on aura

$$P.S = \begin{vmatrix} P \; 0 \ldots 0 \\ 0 \; P \ldots 0 \\ \ldots \; \ldots\ldots \\ 0 \; 0 \ldots P \end{vmatrix} = P^n,$$

d'où

(43) $$S = P^{n-1}.$$

Si dans la seconde des équations (42) on pose $s = 1, 2, \ldots, n$, on obtient n équations, d'où l'on peut déduire les valeurs $a_{r,1}, a_{r,2} \ldots a_{r,n}$. On trouve sans difficulté

$$a_{r,s} = \frac{1}{S} \frac{dS}{d\alpha_{r,s}} P,$$

et, par suite, d'après l'équation (43),

(44) $$P^{n-2} a_{r,s} = \frac{dS}{d\alpha_{r,s}}.$$

En désignant par T, V les déterminants à éléments réciproques correspondants aux déterminants Q, R (28), (29), on aura

$$T = Q^{n-1}, \quad V = R^{n-1},$$

et, par suite, d'après l'équation (30),

$$V = S.T,$$

c'est-à-dire, le produit des déterminants à éléments réciproques correspondants à deux déterminants P, Q, est égal au déterminant à éléments réciproques correspondant au déterminant R produit de P et de Q.

Applications.

Considérons les équations (20) et désignons par $x_{r,1} : x_{r,2} : \ldots : x_{r,n}$ les valeurs des rapports $x_1 : x_2 : \ldots : x_n$ que l'on déduit des $n - 1$ équations qui restent quand on exclut la $r^{ième}$. Nous aurons

$$x_{r,1} : x_{r,2} : \ldots : x_{r,n} = \alpha_{r,1} : \alpha_{r,2} : \ldots : \alpha_{r,n}.$$

En substituant ces valeurs dans le déterminant

$$A = \pm \begin{vmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} \ldots x_{1,n} \\ x_{2,1} & x_{2,2} \ldots x_{2,n} \\ \ldots & \ldots \\ x_{n,1} & x_{n,2} \ldots x_{n,n} \end{vmatrix}$$

on aura

$$a = \pm \lambda . P^{n-1},$$

λ étant une indéterminée. Si l'on suppose $x_{r,s} = 1$, il en résulte

$$\frac{1}{\lambda} = \alpha_{1,s}\, \alpha_{2,s} \ldots \alpha_{n,s}.$$

Au moyen de ces formules on peut résoudre les deux problèmes suivants : 1° trouver l'aire d'un triangle connaissant les équations des côtés; 2° trouver le volume d'un tétraèdre étant données les équations des faces.

Les équations (43), (44) et l'équation (14) trouvée au § III appartiennent à une série de relations qui existent entre les déterminants de déterminants, et que l'on peut déduire de deux formules générales, ainsi que nous allons le démontrer.

Considérons les deux groupes d'équations (16), (17), et écrivons de la manière suivante $i+1$ équations consécutives quelconques prises dans le premier de ces groupes :

$$\begin{aligned}
&a_{r,s}\, x_s + a_{r,s+1}\, x_{s+1} + \ldots + a_{r,u}\, x_u = u_r \\
&- (a_{r,1}\, x_1 + \ldots + a_{r,s-1}\, x_{s-1} + a_{r,u+1}\, x_{u+1} + \ldots + a_{r,n}\, x_n), \\
&a_{r+1,s}\, x_s + a_{r+1,s+1}\, x_{s+1} + \ldots + a_{r+1,u}\, x_u = u_{r+1} \\
&- (a_{r+1,1} x_1 + \ldots + a_{r+1,s-1}\, x_{s-1} + a_{r+1,u+1}\, x_{u+1} + \ldots + a_{r+1,n} x_n), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_{v,s}\, x_s + a_{v,s+1}\, x_{s+1} + \ldots + a_{v,u}\, x_u = u_v \\
&- (a_{v,1}\, x_1 + \ldots + a_{v,s-1}\, x_{s-1} + a_{v,u+1}\, x_{u+1} + \ldots + a_{v,n}\, x_n),
\end{aligned}$$

où

$$u = s + i, \quad v = r + i.$$

En désignant par $P_{v,m}$ le déterminant

$$\begin{vmatrix}
a_{r,s} & a_{r,s+1} & \ldots a_{r,u-1} & a_{r,m} \\
a_{r+1,s} & a_{r+1,s+1} & \ldots a_{r+1,u-1} & a_{r+1,m} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{v,s} & a_{v,s+1} & \ldots a_{v,u-1} & a_{v,m}
\end{vmatrix}$$

et tirant des équations précédentes la valeur de x_u, on établit aisément l'équation

$$(45)\qquad \begin{aligned} & P_{v,1}x_1 + \ldots + P_{v,s-1}x_{s-1} + P_{v,u}x_u + \ldots + P_{v,n}x_n \\ &= u_r \frac{dP_{v,u}}{da_{r,u}} + u_{r+1}\frac{dP_{v,u}}{da_{r+1,u}} + \ldots + u_v \frac{dP_{v,u}}{da_{v,u}}. \end{aligned}$$

Écrivons maintenant de la manière suivante $n-i$ équations convenablement choisies parmi celles du groupe (17):

$$\begin{aligned} & \alpha_{1,1}u_1 + \ldots + \alpha_{r-1,1}u_{r-1} + \alpha_{v,1}u_v + \ldots + \alpha_{n,1}u_n \\ &= Px_1 - (\alpha_{r,1}u_r + \ldots + \alpha_{v-1,1}u_{v-1}), \\ & \alpha_{1,2}u_1 + \ldots + \alpha_{r-1,2}u_{r-1} + \alpha_{v,2}u_v + \ldots + \alpha_{n,2}u_n \\ &= Px_2 - (\alpha_{r,2}u_r + \ldots + \alpha_{v-1,2}u_{v-1}), \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \alpha_{1,s-1}u_1 + \ldots + \alpha_{r-1,s-1}u_{r-1} + \alpha_{v,s-1}u_v + \ldots + \alpha_{n,s-1}u_n \\ &= Px_{s-1} - (\alpha_{r,s-1}u_r + \ldots + \alpha_{v-1,s-1}u_{v-1}), \\ & \alpha_{1,u}u_1 + \ldots + \alpha_{r-1,u}u_{r-1} + \alpha_{v,u}u_v + \ldots + \alpha_{n,u}u_n \\ &= Px_u - (\alpha_{r,u}u_r + \ldots + \alpha_{v-1,u}u_{v-1}), \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \alpha_{1,n}u_1 + \ldots + \alpha_{r-1,n}u_{r-1} + \alpha_{v,n}u_v + \ldots + \alpha_{n,n}u_n \\ &= Px_n - (\alpha_{r,n}u_r + \ldots + \alpha_{v-1,n}u_{v-1}). \end{aligned}$$

En tirant de ces équations la valeur de u_v, on obtiendra sans difficulté

$$(46)\qquad \begin{aligned} & S_{r,u}u_r + S_{r+1,u}u_{r+1} + \ldots + S_{v,u}u_v = P \\ & \left(x_1\frac{dS_{v,u}}{d\alpha_{v,1}} + \ldots + x_{s-1}\frac{dS_{v,u}}{d\alpha_{v,s-1}} + x_u\frac{dS_{v,u}}{d\alpha_{v,u}} + \ldots + x_n\frac{dS_{v,u}}{d\alpha_{v,n}}\right), \end{aligned}$$

où l'on a fait

$$S_{m,u} = \begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \ldots\alpha_{r-1,1} & \alpha_{m,1} & \alpha_{v+1,1} & \ldots\alpha_{n,1} \\ \alpha_{1,2} & \ldots\alpha_{r-1,2} & \alpha_{m,2} & \alpha_{v+1,2} & \ldots\alpha_{n,2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{1,s-1} & \ldots\alpha_{r-1,s-1} & \alpha_{m,s-1} & \alpha_{v+1,s-1} & \ldots\alpha_{n,s-1} \\ \alpha_{1,u} & \ldots\alpha_{r-1,u} & \alpha_{m,u} & \alpha_{v+1,u} & \ldots\alpha_{n,u} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{1,n} & \ldots\alpha_{r-1,n} & \alpha_{m,n} & \alpha_{v+1,n} & \ldots\alpha_{n,n} \end{vmatrix}$$

Observons que les valeurs x_u déduites des équations (45), (46) doivent nécessairement coïncider, puisque au moyen des équations (16) on ne peut exprimer que d'une seule manière la valeur de x_u en fonction des quantités $x_1, \ldots, x_{s-1}, x_{u+1}, \ldots, x_n$; $u_r, u_{r+1}, \ldots, u_v$ en nombre n. D'après cela, en égalant les coefficients de u_{r+a} (a étant un quelconque des nombres de la série $0, 1 \ldots i$) dans les deux valeurs de x_n dont il s'agit, on obtiendra l'équation

$$P \frac{dS_{v,u}}{d\alpha_{v,u}} \frac{dP_{v,u}}{da_{r+a,u}} = P_{v,u} S_{r+a,u}.$$

On en déduit, en supposant $a = i$,

$$(47) \qquad P \frac{dS_{v,u}}{d\alpha_{v,u}} \frac{dP_{v,u}}{da_{v,u}} = P_{v,u} S_{v,u},$$

et comme

$$\frac{dS_{v,u}}{d\alpha_{v,u}} = S_{v+1,u+1}, \qquad \frac{dP_{v,u}}{da_{v,u}} = P_{v-1,u-1},$$

on aura

$$P . S_{v+1,u+1} P_{v-1,u-1} = P_{v,u} . S_{v,u},$$

et, par suite,

$$(48) \qquad P^c S_{v+c,u+c} P_{v-1,u-1} = P_{v+c-1;u+c-1} S_{v,u}.$$

Si dans cette formule on fait $r = s = 1$, on trouve celle qu'ont fait connaître MM. Jacobi et Spottiswoode.

Il est évident qu'on pourra obtenir une seconde formule analogue à (47) en soumettant à l'opération ci-dessus indiquée $i+1$ équations consécutives quelconques du groupe (17) et $n-i$ équations convenablement choisies parmi celles du groupe (16). On arrivera ainsi à la relation

$$(49) \qquad P \frac{dS_{u,v}}{d\alpha_{u,v}} \frac{dP_{u,v}}{da_{u,v}} = P_{u,v} S_{u,v},$$

dans laquelle

$$S_{m,v} = \begin{vmatrix} \alpha_{s,r} & \ldots \alpha_{u-1,r} & \alpha_{m,r} \\ \alpha_{s,r+1} & \ldots \alpha_{u-1,r+1} & \alpha_{m,r+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{s,v} & \ldots \alpha_{u-1,v} & \alpha_{m,v} \end{vmatrix},$$

$$P_{u,m} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \ldots a_{1,r-1} & a_{1,m} & a_{1,v+1} & \ldots a_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{s-1,1} & \ldots a_{s-1,r-1} & a_{s-1,m} & a_{s-1,v+1} & \ldots a_{s-1,n} \\ a_{u,1} & \ldots a_{u,r-1} & a_{u,m} & a_{u,v+1} & \ldots a_{u,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & \ldots a_{n,r-1} & a_{n,m} & a_{n,v+1} & \ldots a_{n,n} \end{vmatrix}$$

et en observant que

$$\frac{dS_{u,v}}{d\alpha_{u,v}} S_{u-1,v-1}, \quad \frac{dP_{u,v}}{da_{u,v}} = P_{u+1,v+1},$$

on aura

(50) $$P^c S_{u-1,v-1}\, P_{u+c,v+c} = P_{u,v}\, S_{u+c-1,v+c-1}.$$

Si dans (48) on pose $i = 0$, et, par suite, $v = r$, $u = s$, et qu'on fasse attention que

$$P_{r-1,s-1} = 1, \quad S_{r,s} = S,$$

il en résultera

$$P^c S_{r+c,s+c} = P_{r+c-1,s+c-1}.S,$$

formule qui comprend comme cas particulier tant l'équation (43) qui s'en déduit en posant $r = s = 1$, que l'équation (44) qui en résulte en supposant $c = 1$.

Pareillement si dans l'équation (50) on fait $i = 0$ et qu'on observe que

$$(*)\ S_{s-1,r-1} = 1, \quad P_{s,r} = P,$$

il vient

$$P^{c-1} P_{s+c,r+c} = S_{s+c-1,r+c-1},$$

formule qui reproduit l'équation (14) quand $c = 2$.

Applications.

1°. Soit représentée par

(51) $$U = \Sigma_r\, a_{r,r}\, x_r^2 + 2\, \Sigma_r\, \Sigma_s\, a_{r,s}\, x_r\, x_s,$$

(*) Les équations $P_{r-1,s-1} = 1$, $S_{s-1,r-1} = 1$ résultent immédiatement de l'inspection des identités

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & b & 0 \\ c & d & 0 \end{vmatrix} = \text{etc.}$$

($a_{r,s} = a_{s,r}$) une forme quadratique de n variables. Observons que le déterminant P est le discriminant de la fonction U, c'est-à-dire le premier membre de l'équation que produit l'élimination des variables $x_1, x_2, \ldots x_n$ entre les équations

$$\frac{dU}{dx_1} = 0, \quad \frac{dU}{dx_2} = 0, \ldots, \quad \frac{dU}{dx_n} = 0.$$

La forme quadratique à n variables

$$V = \Sigma_r \, \alpha_{r,r} \, z_r^2 + \tfrac{1}{2} \Sigma_r \, \Sigma_s \, \alpha_{r,s} \, z_r \, z_s,$$

dans laquelle $\alpha_{r,s} = \frac{dP}{da_{r,s}}$, se nomme la forme réciproque de U. On voit sans peine que la fonction V peut se représenter de la manière suivante par un déterminant :

$$(52) \qquad V = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} & z_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} & z_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} & z_n \\ z_1 & z_2 & \ldots & z_n & 0 \end{vmatrix}$$

et la réciprocité entre les fonctions U et V devient complétement manifeste quand on fait attention qu'en vertu de l'équation (44) la fonction U peut se mettre sous la forme

$$(53) \qquad U = \frac{1}{P^{n-2}} \begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \ldots & \alpha_{1,n} & x_1 \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \ldots & \alpha_{2,n} & x_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \ldots & \alpha_{n,n} & x_n \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n & 0 \end{vmatrix}$$

Supposons

$$(54) \qquad \begin{aligned} z_1 &= a_{1,1} \, x_1 + a_{1,2} \, x_2 + \ldots + a_{1,n} \, x_n, \\ z_2 &= a_{2,1} \, x_2 + a_{2,2} \, x_2 + \ldots + a_{2,n} \, x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_n &= a_{n,1} \, x_1 + a_{n,2} \, x_2 + \ldots + a_{n,n} \, x_n. \end{aligned}$$

Je dis que dans ce cas on aura

$$(55) \qquad V = -P.U.$$

Pour le démontrer, rappelons (page 5) que si aux éléments de la dernière colonne du déterminant V on ajoute respectivement ceux de l'avant-dernière multipliés par $-x_n$, puis ceux de l'antépénultième multipliés par $-x_{n-1}$, et ainsi de suite, la valeur du déterminant n'est pas altérée; mais en effectuant cette opération, le déterminant V, à cause de (51), (54), se transforme dans le suivant :

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} & 0 \\ z_1 & z_2 & \dots & z_n & -U \end{vmatrix}$$

Donc l'équation (55) est réellement vraie.

L'équation $U = 0$, pour $n = 3$ ou $n = 4$ représente une conique ou une surface du second ordre : dans chacun de ces cas l'équation $V = 0$ représentera la polaire réciproque correspondante.

Les formules précédentes sont d'un grand usage dans la théorie des polaires réciproques et dans d'autres questions géométriques relatives aux lignes et aux surfaces du second ordre. La formule (55) peut conduire à la solution de ce problème : *Étant données l'équation d'une conique et les coordonnées d'un point situé dans son plan, établir un critérium qui permette de dire si le point est intérieur ou extérieur à la conique.*

Puisqu'un point est dit extérieur ou intérieur à une conique suivant qu'on peut ou non de ce point mener deux tangentes réelles à la conique, le critérium cherché résultera de la réalité ou de la non-réalité des coordonnées des points d'intersection de la conique avec la polaire du point donné. En conservant les dénominations de l'application 1° du § IV, on trouve facilement que la condition à vérifier pour que les rapports $x : y : z$ des coordonnées de l'inter-

section de la conique $\varphi(x, y, z) = 0$ avec la polaire du point (x_0, y_0, z_0) soient réels, est la suivante :

$$\begin{vmatrix} a & h & f & x_1 \\ h & b & e & y_1 \\ f & e & c & z_1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 0 \end{vmatrix} > 0,$$

où l'on a fait

$$x_1 = ax_0 + hy_0 + fz_0, \quad y_1 = hx_0 + ay_0 + ez_0;$$
$$z_1 = fx_0 + ey_0 + cz_0.$$

En vertu de (55), le critérium cherché sera donc

$$\varphi(x_0, y_0, z_0) \begin{vmatrix} a & h & f \\ h & b & e \\ f & e & c \end{vmatrix} < 0.$$

Ainsi le point sera extérieur ou intérieur, suivant que les deux facteurs du premier membre auront des signes contraires ou des signes semblables. Remarquons que le premier de ces facteurs s'annule quand le point est situé sur la conique; et le second quand la conique se réduit à un système de droites.

2°. Considérons le déterminant

$$H = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots a_{1,n} & \alpha_1 & z_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots a_{2,n} & \alpha_2 & z_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots a_{n,n} & \alpha_n & z_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots \alpha_n & \alpha & \beta \\ z_1 & z_2 & \ldots z_n & \gamma & \delta \end{vmatrix}$$

la formule (14) donnera

$$H \frac{d^2 H}{\delta\alpha\, d\delta} = \frac{dH}{d\alpha} \frac{dH}{d\delta} - \frac{dH}{d\beta} \frac{dH}{d\gamma},$$

ou, en conservant les notations de l'application 1° et supposant $a_{r,s} = a_{s,r}$, $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$,

(56) $$HP = VL - M^2,$$

relation dans laquelle

$$L = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \ldots & a_{1,n} & \alpha_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} \ldots & a_{2,n} & \alpha_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} \ldots & a_{n,n} & \alpha_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 \ldots & \alpha_n & 0 \end{vmatrix} \qquad M = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \ldots & a_{1,n} & z_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} \ldots & a_{2,n} & z_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} \ldots & a_{n,n} & z_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 \ldots & \alpha_n & 0 \end{vmatrix}$$

Soit $A_{r,s}$ une quantité liée à $a_{r,s}$ par la relation

$$A_{r,s} = a_{r,s} + \alpha_r \alpha_s,$$

et désignons par P_1, L_1, V_1, M_1, H_1 les déterminants que l'on obtient en introduisant dans les déterminants P, L, V, M, H les éléments $A_{r,s}$ à la place des éléments $a_{r,s}$. En invoquant le principe d'après lequel la valeur d'un déterminant n'est pas changée quand on ajoute respectivement aux éléments d'une ligne ou d'une colonne les éléments d'une autre ligne ou d'une autre colonne multipliés par une même quantité, on arrive facilement à la démonstration des équations

$$L = L_1, \quad M = M_1, \quad H = H_1.$$

Maintenant observons que le déterminant peut s'écrire

$$V = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \ldots & a_{1,n} & z_1 & \alpha_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} \ldots & a_{2,n} & z_2 & \alpha_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} \ldots & a_{n,n} & z_n & \alpha_n \\ z_1 & z_2 \ldots & z_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 \ldots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

et, par conséquent, en ajoutant aux éléments de la pre-

mière colonne ceux de la dernière multipliés par α_1, aux éléments de la seconde colonne ceux de la dernière multipliés par α_2, et ainsi de suite, d'après le principe ci-dessus rappelé, on aura

$$V = \begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \ldots & A_{1,n} & z_1 & \alpha_1 \\ A_{2,1} & A_{2,2} \ldots & A_{2,n} & z_2 & \alpha_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n,1} & A_{n,2} \ldots & A_{n,n} & z_n & \alpha_n \\ z_1 & z_2 \ldots & z_n & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \ldots & \alpha_n & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

c'est-à-dire

$$V = V_1 + H_1 = V_1 + H.$$

De même le déterminant P peut s'écrire

$$P = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \ldots & a_{1,n} & \alpha_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} \ldots & a_{2,n} & \alpha_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} \ldots & a_{n,n} & \alpha_n \\ 0 & 0 \ldots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

et, en exécutant l'opération indiquée plus haut, on aura

$$P = P_1 + L_1 = P_1 + L.$$

Ces valeurs de L et de H, substituées dans l'équation (56), donnent

$$(57) \qquad M^2 = PV_1 - VP_1.$$

Nous avons appelé la fonction V réciproque de U; il est clair que V_1 sera réciproque de la forme quadratique

$$U + (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n)^2.$$

Si l'on suppose $n = 3$, les équations

$$U = 0, \quad U + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0,$$

représentent deux coniques ayant un double contact, et les équations

$$V = 0, \quad V_1 = 0$$

appartiennent aux polaires réciproques correspondantes. Maintenant, d'après (57), $V_1 = 0$ peut se mettre sous la forme

$$P_1 V + M^2 = 0,$$

ce qui fait voir que les deux polaires réciproques ont un double contact et que la corde de contact est la droite représentée par l'équation

$$M = 0.$$

Un théorème analogue a lieu pour les surfaces du second ordre (*).

§ VII. — *Propriétés des déterminants mineurs.*

On nomme déterminant *mineur* d'un déterminant *complet*

$$P = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

le déterminant que l'on obtient en supprimant dans le déterminant complet un nombre quelconque de lignes et de colonnes. L'ordre du déterminant mineur est déterminé par le nombre de colonnes et de lignes que l'on supprime; c'est ainsi que

$$(58) \qquad \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n-m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n-m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-m,1} & a_{n-m,2} & \ldots & a_{n-m,n-m} \end{vmatrix}$$

(*) Crelle, *Journal*, etc., Band 31.

est un déterminant mineur de l'ordre m. Si les éléments principaux du déterminant mineur ont chacun le premier et le second indice identiques, comme cela a lieu pour le déterminant (58), le déterminant mineur se nomme *principal*.

Pour représenter par un symbole cette espèce de déterminants, considérons les déterminants mineurs d'ordre $m^{ième}$ du déterminant P. Soit

$$u = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1.2\ldots m}$$

le nombre des combinaisons m à m des indices $1, 2, \ldots, n$. Écrivons ces combinaisons les unes à la suite des autres d'après une loi déterminée, par exemple en commençant par celle dans laquelle le produit des indices est le plus petit, et plaçant successivement celles où le produit des mêmes indices va en augmentant. A ces combinaisons ainsi distribuées faisons correspondre les nombres

$$1, 2, 3, \ldots, u.$$

Soient r, s deux quelconques de ces derniers nombres; si dans le déterminant P on supprime tous les éléments qui ont leur premier indice compris dans la combinaison r, et leur second indice compris dans la combinaison s, les éléments restants formeront un déterminant mineur de l'ordre m. Nous représenterons ce déterminant mineur par le symbole ${}^{(m)}P_{r,s}$ et conséquemment par ${}^{(m)}P_{r,r}$ le déterminant principal du $m^{ième}$ ordre. Il est évident que le nombre des déterminants mineurs du $m^{ième}$ ordre est en général égal au carré du nombre u. On pourra donc, avec ces déterminants, former le déterminant

$$\begin{vmatrix} {}^{(m)}P_{1,1} & {}^{(m)}P_{1,2} \ldots & {}^{(m)}P_{1,u} \\ {}^{(m)}P_{2,1} & {}^{(m)}P_{2,2} \ldots & {}^{(m)}P_{2,u} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ {}^{(m)}P_{u,1} & {}^{(m)}P_{u,2} \ldots & {}^{(m)}P_{u,u} \end{vmatrix} = {}^{(m)}S_u.$$

Ces déterminants de déterminants mineurs, considérés pour la première fois par M. Cauchy (*), ont reçu du même auteur le nom de déterminants *dérivés* du déterminant P.

On nomme déterminant complémentaire du déterminant mineur ${}^{(m)}P_{r,s}$ le déterminant mineur de l'ordre $(n-m)$ que l'on déduit du déterminant P en effaçant dans ce dernier tous les éléments à l'exception de ceux qui ont leur premier indice compris dans la combinaison r et leur second indice compris dans la combinaison s. Ce déterminant complémentaire peut se représenter par le symbole ${}^{(n-m)}P_{-r,-s}$, et le déterminant complémentaire du déterminant (58) serait

$$\begin{vmatrix} a_{\nu+1,\nu+1} & a_{\nu+1,\nu+2} \cdots & a_{\nu+1,n} \\ a_{\nu+2,\nu+1} & a_{\nu+2,\nu+2} \cdots & a_{\nu+2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,\nu+1} & a_{n,\nu+2} \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

où $n-m=\nu$. Le déterminant dérivé des déterminants qui sont complémentaires de ceux constituant le déterminant ${}^{(m)}S_u$ peut être représenté par le symbole ${}^{(n-m)}S_u$; et les déterminants ${}^{(m)}S_u$, ${}^{(n-m)}S_u$ se nomment déterminants dérivés complémentaires.

En se rappelant la règle pour la formation des déterminants exposée au § III (page 11), on s'assurera facilement de l'exactitude des deux équations

$$(59)\quad \begin{cases} {}^{(m)}P_{1,s}\ {}^{(n-m)}P_{-1,-s} + {}^{(m)}P_{2,s}\ {}^{(n-m)}P_{-2,-s} + \cdots \\ \qquad + {}^{(m)}P_{u,s}\ {}^{(n-m)}P_{-u,-s} = P, \\ {}^{(m)}P_{1,s}\ {}^{(n-m)}P_{-1,-r} + {}^{(m)}P_{2,s}\ {}^{(n-m)}P_{-2,-r} + \cdots \\ \qquad + {}^{(m)}P_{u,s}\ {}^{(n-m)}P_{-u,-r} = 0. \end{cases}$$

Si dans ces équations on attribue à r et s les valeurs 1,

(*) *Journal de l'École Polytechnique,* XVIIe Cahier.

2, 3,..., n, on obtient u^2 équations, au moyen desquelles, et par l'application de la règle de multiplication des déterminants, on arrive aisément à

$$ {}^{(m)}S_u \; {}^{(n-m)}S_u = P^u. $$

La formule (43) se déduit de celle-ci en faisant $m = 1$.

Remarquons que, d'après les conventions qui ont été faites relativement aux symboles des déterminants mineurs, l'équation (36) prend la forme

$$ Q \; {}^{(1)}P_{r,s} = {}^{(1)}R_{r,1} \; {}^{(n-1)}Q_{-1,-s} + {}^{(1)}R_{r,2} \; {}^{(n-1)}Q_{-2,-s} + \ldots \\ + {}^{(1)}R_{r,n} \; {}^{(n-1)}Q_{-n,-s}, $$

et de même (38) peut s'écrire

$$ Q \; {}^{(2)}P_{r,s} = {}^{(2)}R_{r,1} \; {}^{(n-2)}Q_{-1,-s} + {}^{(2)}R_{r,2} \; {}^{(n-2)}Q_{-2,-s} + \ldots \\ + {}^{(2)}R_{r,i} \; {}^{(n-2)}Q_{-i,-s}, $$

où $i = \frac{n(n-1)}{2}$; et généralement la différentiation exécutée m fois de suite sur l'équation

$$ PQ = R $$

conduit évidemment à

$$ Q \; {}^{(m)}P_{r,s} = {}^{(m)}R_{r,1} \; {}^{(n-m)}Q_{-1,-s} + {}^{(m)}R_{r,2} \; {}^{(n-m)}Q_{-2,-s} + \ldots \\ + {}^{(m)}R_{r,u} \; {}^{(m)}Q_{-u,-s}. $$

Si dans cette équation on suppose $s = 1, 2, 3, \ldots, u$, on obtient u équations qui, respectivement multipliées par

$$ {}^{(m)}Q_{s,1} \; {}^{(m)}Q_{s,2} \ldots {}^{(m)}Q_{s,u}, $$

et ajoutées en ayant égard à celles-ci :

$$ (60) \quad \left\{ \begin{array}{l} {}^{(m)}Q_{s,1} \; {}^{(n-m)}Q_{-s,-1} + {}^{(m)}Q_{s,2} \; {}^{(u-m)}Q_{-s,-2} + \ldots \\ \qquad + {}^{(m)}Q_{s,u} \; {}^{(n-m)}Q_{-s,-u} = Q, \\ {}^{(m)}Q_{s,1} \; {}^{(n-m)}Q_{-r,-1} + {}^{(m)}Q_{s,2} \; {}^{(n-m)}Q_{-r,-2} + \ldots \\ \qquad + {}^{(m)}Q_{s,u} \; {}^{(n-m)}Q_{-r,-u} = 0, \end{array} \right. $$

donnent la suivante :

$$(61)\quad {}^{(m)}P_{r,1}\,{}^{(m)}Q_{s,1} + {}^{(m)}P_{r,2}\,{}^{(m)}Q_{s,2} + \ldots + {}^{(m)}P_{r,u}\,{}^{(m)}Q_{s,u} = {}^{(m)}R_{r,s}.$$

L'équation (33) se déduit de cette dernière en faisant $m = 1$. Si l'on suppose que r est égal à s et que les éléments correspondants des déterminants P et Q sont identiques, on aura

$$(62)\quad ({}^{(m)}P_{r,1})^2 + ({}^{(m)}P_{r,2})^2 + \ldots + ({}^{(m)}P_{r,u})^2 = {}^{(m)}R_{r,r}.$$

En désignant par ${}^{(m)}T_u$, ${}^{(m)}V_u$ les déterminants dérivés des déterminants Q, R, on aura, d'après l'équation (61),

$${}^{(m)}S_u\ {}^{(m)}T_u = {}^{(m)}V_u,$$

et aussi

$${}^{(n-m)}S_u\ {}^{(n-m)}T_u = {}^{(n-m)}V_u.$$

Au moyen des équations (59), (60), on pourra obtenir une équation qui comprendra, comme cas particulier, l'équation (39). En suivant le procédé de calcul employé pour arriver à cette dernière équation, on trouvera facilement

$$(63)\quad PQ = H_{s,1}\,K_{s,1} + H_{s,2}\,K_{s,2} + \ldots + H_{s,u}\,K_{s,u},$$

où

$$H_{s,r} = {}^{(m)}Q_{r,1}\ {}^{(n-m)}P_{-1,-s} + {}^{(m)}Q_{r,2}\ {}^{(n-m)}P_{-2,-s} + \ldots$$
$$+ {}^{(m)}Q_{r,u}\ {}^{(n-m)}P_{-u,-s},$$

$$K_{s,r} = {}^{(n-m)}Q_{-r,-1}\ {}^{(m)}P_{1,s} + {}^{(n-m)}Q_{-r,-2}\ {}^{(m)}P_{2,s} + \ldots$$
$$+ {}^{(n-m)}Q_{-r,-u}\ {}^{(m)}P_{u,s}.$$

La formule de décomposition (63) est due à M. Sylvester (*).

Applications.

1°. Soit représentée par

$$U = \Sigma_r\,\Sigma_s\,a_{r,s}\,x_r\,x_s$$

(*) *Philosophical Magazine*, 1851.

une fonction quadratique à n variables. En transformant cette fonction dans la suivante :

$$V = \Sigma_r \Sigma_s A_{r,s} z_r z_s,$$

au moyen de la substitution linéaire

$$x_1 = c_{1,1} z_1 + c_{2,1} z_2 + \ldots + c_{n,1} z_n,$$
$$x_2 = c_{1,2} z_1 + c_{2,2} z_2 + \ldots + c_{n,2} z_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n = c_{1,n} z_1 + c_{2,n} z_2 + \ldots + c_{n,n} z_n,$$

on a, comme on sait,

$$(64) \qquad A_{r,s} = A_{s,r} = c_{s,1} h_{1,r} + c_{s,2} h_{2,r} + \ldots + c_{s,n} h_{n,r},$$

$h_{1,r}$, $h_{2,r}$,..., étant données par les équations (27).

Supposons que la fonction U se soit transformée dans V par une substitution orthogonale, c'est-à-dire par une substitution dont les coefficients $c_{r,s}$ vérifient les équations

$$c^2_{r,1} + c^2_{r,2} + \ldots + c^2_{r,n} = 1,$$
$$c_{r,1} c_{s,1} + c_{r,2} c_{s,2} + \ldots + c_{r,n} c_{s,n} = 0,$$

ce qui entraîne

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_n^2.$$

On sait que dans ce cas la fonction V peut se réduire à la forme

$$V = \Sigma_r A_r z_r^2,$$

et que les coefficients A_r sont les racines de l'équation du $n^{\text{ième}}$ degré

$$(65) \qquad f(-\lambda) = \begin{vmatrix} a_{1,1} - \lambda & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} - \lambda & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation rencontrée pour la première fois par Laplace dans ses recherches sur les inégalités séculaires des planètes (*), et qui a donné naissance aux premiers travaux du même auteur sur les déterminants, admet n racines réelles, comme l'ont démontré Borchardt et Jacobi (**). En se rappelant la manière dont cette propriété a été établie pour les équations du troisième degré de même forme (§ V), il est clair qu'en posant

$$k_{r,s} = a_{r,1}\,a_{s,1} + a_{r,2}\,a_{s,2} + \ldots + a_{r,n}\,a_{s,n},$$

et, par suite,

$$f(\lambda)f(-\lambda) = \begin{vmatrix} k_{1,1}-\lambda^2 & k_{1,2} & \ldots & k_{1,n} \\ k_{2,1} & k_{2,2}-\lambda^2 & \ldots & k_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ k_{n,1} & k_{n,2} & \ldots & k_{n,n}-\lambda^2 \end{vmatrix}$$

nous aurons démontré la réalité des racines de l'équation (65) quand nous aurons prouvé que tous les coefficients des diverses puissances de λ dans l'équation suivante sont positifs :

$$(66)\quad \left\{ \begin{aligned} (-1)^n f(\lambda)\,f(-\lambda) = \lambda^{2n} - \mathrm{H}_{n-1}\,\lambda^{2n-2} \\ + \mathrm{H}_{n-2}\,\lambda^{2n-4} \ldots \mp \mathrm{H}_1\lambda^2 \pm \mathrm{H}_0. \end{aligned} \right.$$

Or le coefficient de λ^{2m} résulte évidemment de la somme des déterminants mineurs principaux du $m^{ième}$ ordre du déterminant

$$\begin{vmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} & \ldots & k_{1,n} \\ k_{2,1} & k_{2,2} & \ldots & k_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ k_{n,1} & k_{n,2} & \ldots & k_{n,n} \end{vmatrix}$$

En représentant donc par ${}^{(m)}\mathrm{R}_{r,r}$ un quelconque de ces

---

(*) *Histoire de l'Académie des Sciences,* année 1772.

(**) *Journal* de Liouville, t. XII. — Jacobi, *Matematische Werke,* Band 1.

déterminants mineurs principaux, par P le déterminant $f(0)$, et observant qu'entre les déterminants ${}^{(m)}R_{r,r}$ et les déterminants mineurs du déterminant P règne l'équation (62), il s'ensuit que le coefficient de H_m est égal à la somme des carrés de tous les déterminants mineurs du $m^{ième}$ ordre du déterminant P. Les coefficients de (66) sont donc positifs, et, par suite, réelles les racines de l'équation (65).

2°. En conservant les notations de l'application 1°, désignons par N le déterminant

$$\begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \ldots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \ldots & A_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n,1} & A_{n,2} \ldots & A_{n,n} \end{vmatrix}$$

Quelle que soit la substitution linéaire qui transforme la fonction U dans la fonction V, il existe entre les déterminants mineurs du déterminant P et les déterminants mineurs du déterminant N une relation importante que nous allons actuellement établir. Observons pour cela que, ayant par (64)

$$N = QR,$$

on obtiendra semblablement à (61)

$${}^{(m)}Q_{v,1}\ {}^{(m)}R_{1,s} + {}^{(m)}Q_{v,2}\ {}^{(m)}R_{2,s} + \ldots + {}^{(m)}Q_{v,u}\ {}^{(m)}R_{u,s} = {}^{(m)}N_{v,s},$$

et, par suite, en tirant de la même équation (61) les valeurs de

$${}^{(m)}R_{1,s}\ {}^{(m)}R_{2,s} \ldots\ {}^{(m)}R_{u,s},$$

et les substituant dans l'équation précédente, on aura

$${}^{(m)}N_{v,s} = \Sigma_r\ {}^{(m)}Q_{v,r} \left\{ \begin{array}{l} {}^{(m)}P_{r,1}\ {}^{(m)}Q_{s,1} + {}^{(m)}P_{r,2}\ {}^{(m)}Q_{s,2} + \ldots \\ \qquad + {}^{(m)}P_{r,u}\ {}^{(m)}Q_{s,u} \end{array} \right\},$$

ce qui est la relation que nous avions en vue de trouver.

Si dans cette équation on pose $\nu = s$ et ensuite $s = 1, 2, \ldots, u$, on obtient

$$\Sigma_s\, {}^{(m)}N_{s,s} = \Sigma_r\, \Sigma_s\, {}^{(m)}Q_{s,r} \left\{ \begin{array}{r} {}^{(m)}P_{r,1}\ {}^{(m)}Q_{s,1} + {}^{(m)}P_{r,2}\ Q_{s,2} + \ldots \\ + {}^{(m)}P_{r,u}\ Q_{s,u} \end{array} \right\},$$

équation qui, en posant

$$Q^2 = M,$$

se transforme en

$$\Sigma_s\, {}^{(m)}N_{s,s} = \Sigma_r \left\{ \begin{array}{r} {}^{(m)}P_{r,1}\ {}^{(m)}M_{r,1} + {}^{(m)}P_{r,2}\ {}^{(m)}M_{r,2} + \ldots \\ + {}^{(m)}P_{r,u}\ {}^{(m)}M_{r,u} \end{array} \right\}.$$

On pouvait arriver directement à ce dernier résultat en observant que $PM = N$.

Si la substitution qui transforme U en V était orthogonale, on aurait évidemment

$${}^{(m)}M_{r,r} = 1, \quad {}^{(m)}M_{r,s} = 0,$$

et, par suite,

$$\Sigma_s\ {}^{(m)}N_{s,s} = \Sigma_s\ {}^{(m)}P_{s,s},$$

formule connue.

3°. Supposons que dans les deux fonctions quadratiques U, V l'on ait

$$a_{r,s} = a_{s,r} = \gamma_{r,1}\,\gamma_{s,1} + \gamma_{r,2}\,\gamma_{s,2} + \ldots + \gamma_{r,n}\,\gamma_{s,n},$$
$$A_{r,s} = A_{s,r} = \gamma_{1,r}\,\gamma_{1,s} + \gamma_{2,r}\,\gamma_{2,s} + \ldots + \gamma_{n,r}\,\gamma_{n,s};$$

dans ce cas, les deux fonctions sont équivalentes, c'est-à-dire peuvent se réduire à une même fonction par le moyen d'une substitution linéaire. En effet, soit H le déterminant

$$\left| \begin{array}{cccc} \gamma_{1,1} & \gamma_{1,2} & \ldots & \gamma_{1,n} \\ \gamma_{2,1} & \gamma_{2,2} & \ldots & \gamma_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \gamma_{n,1} & \gamma_{n,2} & \ldots & \gamma_{n,n} \end{array} \right|$$

d'après (67), on aura

$$P = N = H^2,$$

c'est-à-dire les déterminants P, N que l'on obtient en effectuant le carré du déterminant H par lignes ou par colonnes seront égaux en valeur absolue, mais de formes différentes. L'égalité des deux fonctions U, V sera démontrée lorsqu'on aura mis en évidence celle des coefficients des mêmes puissances de λ dans les deux équations du $n^{ième}$ degré

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}-\lambda & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2}-\lambda & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n}-\lambda \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} A_{1,1}-\lambda & A_{1,2} & \ldots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2}-\lambda & \ldots & A_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \ldots & A_{n,n}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Or le coefficient de λ^m dans la première équation est formé par la somme des déterminants mineurs principaux du $m^{ième}$ ordre du déterminant P, et le coefficient de λ^m dans la seconde équation n'est autre que la somme des déterminants mineurs principaux du $m^{ième}$ ordre du déterminant N. Et comme d'ailleurs

$$\begin{aligned} {}^{(m)}P_{r,r} &= ({}^{(m)}H_{r,1})^2 + ({}^{(m)}H_{r,2})^2 + \ldots + ({}^{(m)}H_{r,u})^2, \\ {}^{(m)}N_{r,r} &= ({}^{(m)}H_{1,r})^2 + ({}^{(m)}H_{2,r})^2 + \ldots + ({}^{(m)}H_{u,r})^2, \end{aligned}$$

il en résultera

$$\Sigma_r\ {}^{(m)}P_{r,r} = \Sigma_r\ {}^{(m)}N_{r,r},$$

c'est-à-dire que les coefficients de λ^m dans les deux équations en question seront identiques.

Exemple. — Les ellipsoïdes représentés par les deux équations

$$\begin{aligned} (a_1x+b_1y+c_1z)^2+(a_2x+b_2y+c_2z)^2+(a_3x+b_3y+c_3z)^2 &= k^2, \\ (a_1x+a_2y+a_3z)^2+(b_1x+b_2y+b_3z)^2+(c_1x+c_2y+c_3z)^2 &= k^2, \end{aligned}$$

sont égaux entre eux (*).

(*) *Nouvelles Annales de Mathématiqnes* rédigées par M. TERQUEM. Juillet 1853.

4°. Le système d'équations algébriques linéaires

$$(68)\quad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,s}x_s = u_1, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,s}x_s = u_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,s}x_s = u_n, \end{cases}$$

dans lequel $n > s$, est nommé système *surabondant*, par la raison qu'il est composé d'un nombre d'équations supérieur à celui strictement nécessaire pour la détermination des inconnues.

Supposons que les quantités $u_1, u_2, \ldots, u_n$ soient liées par les s équations

$$(69)\quad \begin{cases} c_{1,1}u_1 + c_{2,1}u_2 + \ldots + c_{n,1}u_n = v_1, \\ c_{1,2}u_1 + c_{2,2}u_2 + \ldots + c_{n,2}u_n = v_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{1,s}u_1 + c_{2,s}u_2 + \ldots + c_{n,s}u_n = v_s. \end{cases}$$

En substituant dans ces dernières équations pour $u_1, u_2, \ldots, u_n$ leurs valeurs données par (68), on obtiendra

$$(70)\quad \begin{cases} h_{1,1}x_1 + h_{2,1}x_2 + \ldots + h_{s,1}x_s = v_1, \\ h_{1,2}x_1 + h_{2,2}x_2 + \ldots + h_{s,2}x_s = v_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ h_{1,s}x_1 + h_{2,s}x_2 + \ldots + h_{s,s}x_s = v_s, \end{cases}$$

où

$$(71)\quad a_{1,r}c_{1,s} + a_{2,r}c_{2,s} + \ldots + a_{n,r}c_{n,s} = h_{r,s}.$$

Des équations (70) on déduit

$$\begin{gathered} Hx_1 = v_1\frac{dH}{dh_{1,1}} + v_2\frac{dH}{dh_{1,2}} + \ldots + v_s\frac{dH}{dh_{1,s}}, \\ Hx_2 = v_1\frac{dH}{dh_{2,1}} + v_2\frac{dH}{dh_{2,2}} + \ldots + v_s\frac{dH}{dh_{2,s}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Hx_s = v_s\frac{dH}{dh_{s,1}} + v_2\frac{dH}{dh_{s,2}} + \ldots + v_s\frac{dH}{dh_{s,s}}, \end{gathered}$$

H représentant le déterminant

$$\begin{vmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} \ldots & h_{1,s} \\ h_{2,1} & h_{2,2} \ldots & h_{2,s} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ h_{s,1} & h_{s,2} \ldots & h_{s,s} \end{vmatrix}$$

et si dans ces dernières on met à la place de $v_1, v_2, \ldots, v_s$ leurs valeurs données par (69), on obtient

$$\begin{aligned} Hx_1 &= k_{1,1}\, u_1 + k_{1,2}\, u_2 + \ldots + k_{1,n}\, u_n, \\ Hx_2 &= k_{2,1}\, u_1 + k_{2,2}\, u_2 + \ldots + k_{2,n}\, u_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Hx_s &= k_{s,1}\, u_1 + k_{s,2}\, u_2 + \ldots + k_{s,n}\, u_n, \end{aligned}$$

où

$$k_{r,i} = c_{i,1}\frac{dH}{dh_{r,1}} + c_{i,2}\frac{dH}{dh_{r,2}} + \ldots + c_{i,s}\frac{dH}{dh_{r,s}}.$$

Maintenant si l'on observe que par (71) on a

$$c_{i,s} = \frac{dh_{r,s}}{da_{i,r}},$$

il en résulte

$$k_{r,i} = \frac{dH}{da_{i,r}};$$

et en substituant,

$$(72)\quad \left\{ \begin{aligned} Hx_1 &= u_1\frac{dH}{da_{1,1}} + u_2\frac{dH}{da_{2,1}} + \ldots + u_n\frac{dH}{da_{n,1}}, \\ Hx_2 &= u_1\frac{dH}{da_{1,2}} + u_2\frac{dH}{da_{2,2}} + \ldots + u_n\frac{dH}{da_{n,2}}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Hx_s &= u_1\frac{dH}{da_{1,s}} + u_2\frac{dH}{da_{2,s}} + \ldots + u_n\frac{dH}{da_{n,s}}. \end{aligned} \right.$$

Le déterminant H est un déterminant mineur principal

de l'ordre $(n-s)^{ième}$ du déterminant R (équat. 28); par conséquent, en le représentant, conformément aux conventions du § VII, par le symbole ${}^{(n-s)}R_{u,u}$, on aura, semblablement à (61),

$$H = {}^{(n-s)}R_{u,u} = \Sigma_r\, {}^{(n-s)}P_{u,r}\, {}^{(n-s)}Q_{u,r}.$$

Par là, les équations (72) prendront la forme

$$(73)\quad \left\{ \begin{aligned} x_1\, \Sigma_r\, {}^{(n-s)}P_{u,r}\, {}^{(n-s)}Q_{u,r} &= u_1\, \Sigma_r\, {}^{(n-s)}Q_{u,r} \frac{d\ {}^{(n-s)}P_{u,r}}{da_{1,1}} + \ldots \\ &\quad + u_n\, \Sigma_r\, {}^{(n-s)}Q_{u,r} \frac{d\ {}^{(n-s)}P_{u,r}}{da_{n,1}}, \\ x_2\, \Sigma_r\, {}^{(n-s)}P_{u,r}\, {}^{(n-s)}Q_{u,r} &= u_1\, \Sigma_r\, {}^{(n-s)}Q_{u,r} \frac{d\ {}^{(n-s)}P_{u,r}}{da_{1,2}} + \ldots \\ &\quad + u_n\, \Sigma_r\, {}^{(n-s)}Q_{u,r} \frac{d\ {}^{(n-s)}P_{u,r}}{da_{n,2}}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_s\, \Sigma_r\, {}^{(n-s)}P_{u,r}\, {}^{(n-s)}Q_{u,r} &= u_1\, \Sigma_r\, {}^{(n-s)}Q_{u,r} \frac{d\ {}^{(n-s)}P_{u,r}}{da_{1,s}} + \ldots \\ &\quad + u_n\, \Sigma_r\, {}^{(n-s)}Q_{u,r} \frac{d\ {}^{(n-s)}P_{u,r}}{da_{n,s}}. \end{aligned} \right.$$

Observons que le déterminant ${}^{(n-s)}P_{u,r}$ contient seulement un nombre s^2 des éléments qui constituent le déterminant P, et que les premiers indices de ces éléments ne peuvent se trouver parmi ceux de la combinaison u. En représentant par

$$\begin{vmatrix} a_{r_1,1} & a_{r_2,1} \ldots & a_{r_s,1} \\ a_{r_1,2} & a_{r_2,2} \ldots & a_{r_s,2} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r_1,s} & a_{r_2,s} \ldots & a_{r_s,s} \end{vmatrix}$$

le déterminant ${}^{(n-s)}P_{u,r}$, les équations (73) se transforment

en

$$
(74)\quad \begin{cases}
x_1\, \Sigma_r\, {}^{(n-s)}P_{u,r}\, {}^{(n-s)}Q_{u,r} = \Sigma_r\, {}^{(n-s)}Q_{u,r} \left\{ \begin{array}{l} u_{r_1} \dfrac{d\; {}^{(n-s)}P_{u,r}}{da_{r_1,1}} + \ldots \\ + u_{r_s} \dfrac{d\; {}^{(n-s)}P_{u,r}}{da_{r_s,1}} \end{array} \right\}, \\
x_2\, \Sigma_r\, {}^{(n-s)}P_{u,r}\, {}^{(n-s)}Q_{u,r} = \Sigma_r\, {}^{(n-s)}Q_{u,r} \left\{ \begin{array}{l} u_{r_1} \dfrac{d\; {}^{(n-s)}P_{u,r}}{da_{r_1,2}} + \ldots \\ + u_{r_s} \dfrac{d\; {}^{(n-s)}P_{u,r}}{da_{r_s,2}} \end{array} \right\}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_s\, \Sigma_r\, {}^{(n-s)}P_{u,r}\, {}^{(n-s)}Q_{u,r} = \Sigma_r\, {}^{(n-s)}Q_{u,r} \left\{ \begin{array}{l} u_{r_1} \dfrac{d\; {}^{(n-s)}P_{u,r}}{da_{r_1,s}} + \ldots \\ + u_{r_s} \dfrac{d\; {}^{(n-s)}P_{u,r}}{da_{r_s,s}} \end{array} \right\},
\end{cases}
$$

$r_1, r_2, \ldots, r_s$ étant des nombres différents entre eux et appartenant à la série $1, 2, \ldots, n$.

Si maintenant on prend s des équations (68), par exemple celles où les $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ont les indices $r_1, r_2, \ldots, r_s$, pour en déduire les valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_s$, on a

$$
(75)\quad \begin{cases}
(x_1)\; {}^{(n-s)}P_{u,r} = u_{r_1} \dfrac{d\; {}^{(n-s)}P_{u,r}}{da_{r_1,1}} + \ldots + u_{r_s} \dfrac{d\; {}^{(n-s)}P_{u,r}}{da_{r_s,1}}, \\
(x_2)\; {}^{(n-s)}P_{u,r} = u_{r_1} \dfrac{d\; {}^{(n-s)}P_{u,r}}{da_{r_1,2}} + \ldots + u_{r_s} \dfrac{d\; {}^{(n-s)}P_{u,r}}{da_{r_s,2}}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(x_s)\; {}^{(n-s)}P_{u,r} = u_{r_1} \dfrac{d\; {}^{(n-s)}P_{u,r}}{da_{r_1,s}} + \ldots + u_{r_s} \dfrac{d\; {}^{(n-s)}P_{u,r}}{da_{r_s,s}},
\end{cases}
$$

les $x_1, x_2, \ldots$, étant placées entre parenthèses pour rappeler qu'elles sont déduites d'un système surabondant. Du rap-

prochement des équations (74), (75), il résulte

$$x_1 = \frac{\Sigma_r\, {}^{(n-s)}P_{u,r}\, {}^{(n-s)}Q_{u,r}\, (x_1)}{\Sigma_r\, {}^{(n-s)}P_{u,r}\, {}^{(n-s)}Q_{u,r}},$$

$$x_2 = \frac{\Sigma_r\, {}^{(n-s)}P_{u,r}\, {}^{(n-s)}Q_{u,r}\, (x_2)}{\Sigma_r\, {}^{(n-s)}P_{u,r}\, {}^{(n-s)}Q_{u,r}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_s = \frac{\Sigma_r\, {}^{(n-s)}P_{u,r}\, {}^{(n-s)}Q_{u,r}\, (x_s)}{\Sigma_r\, {}^{(n-s)}P_{u,r}\, {}^{(n-s)}Q_{u,r}},$$

et si les coefficients des $x_1, x_2, \ldots$, dans les équations (68) étaient respectivement égaux à ceux des $u_1, u_2, \ldots$, dans (69), on aurait

$$x_1 = \frac{\Sigma_r\, \left({}^{(n-s)}P_{u,r}\right)^2 (x_1)}{\Sigma_r\, \left({}^{(n-s)}P_{u,r}\right)^2}, \qquad x_2 = \frac{\Sigma_r\, \left({}^{(n-s)}P_{u,r}\right)^2 (x_2)}{\Sigma_r\, \left({}^{(n-s)}P_{u,r}\right)^2}, \ldots,$$

$$x_s = \frac{\Sigma_r\, \left({}^{(n-s)}P_{u,r}\right)^2 (x_s)}{\Sigma_r\, \left({}^{(n-s)}P_{u,r}\right)^2}.$$

§ VIII. — *Des déterminants gauches et des déterminants symétriques.*

Un déterminant P dont les éléments satisfont à l'équation

$$a_{r,s} + a_{s,r} = 0$$

se nomme déterminant *gauche*. Et si en même temps ces éléments satisfont à cette autre condition

$$a_{r,r} = 0,$$

le déterminant gauche est dit *symétrique*.

La considération des déterminants gauches symétriques doit précéder celle des déterminants simplement gauches, par la raison que ces derniers peuvent s'exprimer au moyen des premiers. Pour démontrer cette propriété, observons qu'en général un déterminant P quelconque peut être ex-

5

primé au moyen de déterminants dans lesquels les éléments principaux sont nuls. Effectivement, en désignant par P_0 le déterminant dans lequel on suppose égaux à zéro tous les éléments principaux, et par $({}^{(m)}P_{i,i})_0$ un déterminant mineur principal du $m^{ième}$ ordre du déterminant P, dans lequel déterminant mineur on suppose aussi nuls les éléments principaux, on a évidemment

$$(76)\quad \left\{ \begin{array}{l} P = P_0 + \Sigma_r\, a_{r,r}\,({}^{(1)}P_{i,i})_0 \\ \quad + \Sigma_r\,\Sigma_s\, a_{r,r}\, a_{s,s}\,({}^{(2)}P_{i,i})_0 + \ldots + a_{1,1}\, a_{2,2} \ldots a_{n,n}. \end{array} \right.$$

Exemple.

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & 0 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & 0 \end{vmatrix} + \alpha_1 \begin{vmatrix} 0 & \gamma_2 \\ \beta_3 & 0 \end{vmatrix} + \beta_2 \begin{vmatrix} 0 & \gamma_1 \\ \alpha_3 & 0 \end{vmatrix} + \gamma_3 \begin{vmatrix} 0 & \beta_1 \\ \alpha_2 & 0 \end{vmatrix} + \alpha_1\,\beta_2\,\gamma_3.$$

Actuellement si le déterminant P est gauche, il est clair que les déterminants mineurs principaux $({}^{(m)}P_{i,i})_0$ sont gauches symétriques, ce qui met en évidence la propriété énoncée.

Les déterminants gauches symétriques se distinguent de toute autre espèce de déterminants par les deux propriétés suivantes qui leur sont particulières.

1°. Tout déterminant symétrique gauche d'ordre impair est égal à zéro. En effet, observons que le développement du déterminant P supposé gauche symétrique et d'ordre impair contiendra les deux termes

$$\pm\, a_{r,s}\, a_{1,s} \begin{vmatrix} 0 & a_{2,3} & \ldots & a_{2,s-1} & a_{2,s+1} & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r-1,2} & a_{r-1,3} & \ldots & a_{r-1,s-1} & a_{r-1,s+1} & \ldots & a_{r-1,n} \\ a_{r+1,2} & a_{r+1,3} & \ldots & a_{r+1,s-1} & a_{r+1,s+1} & \ldots & a_{r+1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,2} & a_{n,3} & \ldots & a_{n,s-1} & a_{n,s+1} & \ldots & 0 \end{vmatrix}$$

$$\pm a_{1,r}\, a_{s,1} \begin{vmatrix} 0 & a_{2,3} & \ldots & a_{2,r-1} & a_{2,r+1} & \ldots & a_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s-1,2} & a_{s-1,3} & \ldots & a_{s-1,r-1} & a_{s-1,r+1} & \ldots & a_{s-1,n} \\ a_{s+1,2} & a_{s+1,3} & \ldots & a_{s+1,r-1} & a_{s+1,r+1} & \ldots & a_{s+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,2} & a_{n,3} & \ldots & a_{n,r-1} & a_{n,r+1} & \ldots & 0 \end{vmatrix}$$

Maintenant si l'on multiplie les éléments de chaque colonne de ce dernier déterminant par -1, qu'on observe que ces mêmes colonnes sont en nombre impair puisque n est impair, et qu'on ait égard à la relation $a_{r,s} + a_{s,r} = 0$, ce second terme pourra s'écrire

$$\mp a_{1,r}\, a_{s,1} \begin{vmatrix} 0 & a_{3,2} & \ldots & a_{r-1,2} & a_{r+1,2} & \ldots & a_{n,2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{2,s-1} & a_{3,s-1} & \ldots & a_{r-1,s-1} & a_{r+1,s-1} & \ldots & a_{n,s-1} \\ a_{2,s+1} & a_{3,s+1} & \ldots & a_{r-1,s+1} & a_{r+1,s+1} & \ldots & a_{n,s+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{2,n} & a_{3,n} & \ldots & a_{r-1,n} & a_{r+1,n} & \ldots & 0 \end{vmatrix}$$

et comme ce dernier déterminant est identique au déterminant du premier terme, et que $a_{r,1}\, a_{1,s} = a_{1,r}\, a_{s,1}$, ces deux termes se détruisent mutuellement. Par conséquent, il ne restera dans le développement dont il s'agit que les termes de la forme

$$\pm a_{1,r}\, a_{r,1} \begin{vmatrix} 0 & a_{2,3} & \ldots & a_{2,r-1} & a_{2,r+1} & \ldots & a_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r-1,2} & a_{r-1,3} & \ldots & 0 & a_{r-1,r+1} & \ldots & a_{r-1,n} \\ a_{r+1,2} & a_{r+1,3} & \ldots & a_{r+1,r-1} & 0 & \ldots & a_{r+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,2} & a_{n,3} & \ldots & a_{n,r-1} & a_{n,r+1} & \ldots & 0 \end{vmatrix}$$

Mais ce dernier déterminant est symétrique gauche et d'ordre impair $(n-2)$; par conséquent, tout déterminant symétrique gauche et d'ordre impair sera nul quand il en

sera de même du déterminant symétrique gauche du troisième ordre. Or le développement de ce dernier déterminant étant

$$a_{2,1}\,a_{3,2}\,a_{1,3} + a_{3,1}\,a_{1,2}\,a_{2,3} = 0,$$

la proposition est vraie pour le cas général.

2°. Un déterminant gauche symétrique d'ordre pair est un carré. En effet, le développement du déterminant P contiendra les termes

$$a_{1,r}^2 \begin{vmatrix} 0 & a_{2,3} & \ldots & a_{2,r-1} & a_{2,r+1} & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r-1,2} & a_{r-1,3} & \ldots & 0 & a_{r-1,r+1} & \ldots & a_{r-1,n} \\ a_{r+1,2} & a_{r+1,3} & \ldots & a_{r+1,r-1} & 0 & \ldots & a_{r+1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,2} & a_{n,3} & \ldots & a_{n,r-1} & a_{n,r+1} & \ldots & 0 \end{vmatrix}$$

$$a_{1,s}^2 \begin{vmatrix} 0 & a_{2,3} & \ldots & a_{2,s-1} & a_{2,s+1} & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{s-1,2} & a_{s-1,3} & \ldots & 0 & a_{s-1,s+1} & \ldots & a_{s-1,n} \\ a_{s+1,2} & a_{s+1,3} & \ldots & a_{s+1,s-1} & 0 & \ldots & a_{s+1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,2} & a_{n,3} & \ldots & a_{n,s-1} & a_{n,s+1} & \ldots & 0 \end{vmatrix}$$

$$\pm 2a_{1,r}a_{1,s} \begin{vmatrix} 0 & a_{2,3} & \ldots & a_{2,r-1} & a_{2,r+1} & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{s-1,2} & a_{s-1,3} & \ldots & a_{s-1,r-1} & a_{s-1,r+1} & \ldots & a_{s-1,n} \\ a_{s+1,2} & a_{s+1,3} & \ldots & a_{s+1,r-1} & a_{s+1,r+1} & \ldots & a_{s+1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,2} & a_{n,3} & \ldots & a_{n,r-1} & a_{n,r+1} & \ldots & 0 \end{vmatrix}$$

Les coefficients de $a_{1,r}^2$, $a_{1,s}^2$, $\pm 2a_{1,r}\,a_{1,s}$ peuvent se représenter respectivement par

$$-\frac{d^2 P}{da_{1,r}\,da_{r,1}},\quad -\frac{d^2 P}{da_{1,s}\,da_{s,1}},\quad \pm\frac{d^2 P}{da_{1,r}\,da_{s,1}}.$$

Maintenant, par la formule (14), on a

$$P\frac{d^2P}{da_{1,r}\,da_{r,1}}=\frac{dP}{da_{1,r}}\frac{dP}{da_{r,1}},\quad P\frac{d^2P}{da_{1,s}\,da_{s,1}}=\frac{dP}{da_{1,s}}\frac{dP}{da_{s,1}},$$

$$P\frac{d^2P}{da_{1,r}\,da_{s,1}}=\frac{dP}{da_{1,r}}\frac{dP}{da_{s,1}},$$

à cause que $\frac{dP}{da_{i,i}}=0$, comme étant un déterminant gauche symétrique d'ordre impair. Ces équations, en faisant attention à celle-ci :

$$\frac{dP}{da_{r,s}}=-\frac{dP}{da_{s,r}},$$

qui a évidemment lieu pour un déterminant quelconque symétrique gauche d'ordre pair, donnent la suivante :

$$\left(\frac{d^2P}{da_{1,r}\,da_{s,1}}\right)^2=\frac{d^2P}{da_{1,r}\,da_{r,1}}\frac{d^2P}{da_{1,s}\,da_{s,1}},$$

qui met précisément en évidence la propriété que possède le déterminant P d'être un carré.

Par là, le développement du déterminant P pourra être présenté sous la forme

$$P=\left\{\begin{array}{l}\pm a_{1,2}\left(\frac{d^2P}{da_{1,1}\,da_{2,2}}\right)^{\frac{1}{2}}\pm a_{1,3}\left(\frac{d^2P}{da_{1,1}\,da_{3,3}}\right)^{\frac{1}{2}}\pm\ldots\\ \pm a_{1,n}\left(\frac{d^2P}{da_{1,1}\,da_{n,n}}\right)^{\frac{1}{2}}\end{array}\right\}^2,$$

ou plus généralement

$$(77)\qquad P=\left\{\Sigma_s\pm a_{r,s}\left(\frac{d^2P}{da_{r,r}\,da_{s,s}}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^2,$$

expression dans laquelle il faut faire, après les différentiations, $a_{1,1}=a_{2,2}=\ldots=0$. Il est bon de remarquer que

le déterminant $\frac{d^2 P}{da_{r,r}\, da_{s,s}}$ est un carré, comme étant symétrique gauche et d'ordre pair $n - 2$.

Exemple. — Supposons

$$P = \begin{vmatrix} 0 & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & 0 & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & 0 & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & 0 \end{vmatrix}$$

on aura

$$P = \left\{ a_{1,2} \begin{vmatrix} 0 & a_{3,4} \\ a_{4,3} & 0 \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} - a_{1,3} \begin{vmatrix} 0 & a_{2,4} \\ a_{4,2} & 0 \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} + a_{1,4} \begin{vmatrix} 0 & a_{2,3} \\ a_{3,2} & 0 \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} \right\}^2,$$

c'est-à-dire

$$P = (a_{1,2}\, a_{3,4} - a_{1,3}\, a_{2,4} + a_{1,4}\, a_{2,3})^2.$$

En désignant par H la racine carrée du déterminant P, il est important de démontrer que cette quantité jouit d'une propriété analogue à l'une des propriétés principales des déterminants. En différentiant l'équation $P = H^2$ par rapport à $a_{r,s}$, il vient

$$\text{(78)} \qquad \frac{dP}{da_{r,s}} = H \frac{dH}{da_{r,s}},$$

où l'on n'a pas mis dans le second membre le coefficient 2, à cause que dans le premier la dérivée de P par rapport à $a_{r,s}$ représente le déterminant du $(n - 1)^{ième}$ ordre que l'on déduit de P en supprimant la $s^{ième}$ colonne et la $r^{ième}$ ligne, c'est-à-dire en n'ayant pas égard à ce que $a_{r,s} = - a_{s,r}$; tandis qu'au contraire cette relation est prise en considération quand on différentie l'expression algébrique de H. En élevant au carré l'équation précédente, on a

$$\left(\frac{dP}{da_{r,s}}\right)^2 = P \left(\frac{dH}{da_{r,s}}\right)^2,$$

et comme

$$P\frac{d^2P}{da_{r,r}\,da_{s,s}}=\left(\frac{dP}{da_{r,s}}\right)^2,$$

il en résulte

$$\left(\frac{d^2P}{da_{r,r}\,da_{s,s}}\right)^{\frac{1}{2}}=\pm\frac{dH}{da_{r,s}}.$$

Cette valeur substituée dans (77) donne

$$P=\left\{\Sigma_s\left(a_{r,s}\frac{dH}{da_{r,s}}\right)\right\}^2,$$

et, par suite,

$$H=\Sigma_s\left(a_{r,s}\frac{dH}{da_{r,s}}\right),$$

équation qui exprime une propriété de la fonction H analogue à une propriété connue des déterminants.

Mais la propriété caractéristique de cette fonction H réside dans le changement de signe qu'elle subit lorsqu'on permute les deux indices. Permutons en effet dans H les deux indices r, s; comme dans les termes de cette fonction qui contiennent l'élément $a_{r,s}$ ne figurent pas d'autres éléments affectés de ces mêmes indices, si l'on désigne par H_1 ce que devient H après la permutation mentionnée, on aura

$$\frac{dH}{da_{r,s}}=-\frac{dH_1}{da_{r,s}}.$$

Or quand on effectue cette permutation dans le déterminant P, il ne change pas de valeur et se ramène aisément à sa forme primitive; par conséquent, d'après l'équation (78), on aura

$$\frac{dP}{da_{r,s}}=H_1\frac{dH_1}{da_{r,s}}=-H_1\frac{dH}{da_{r,s}},$$

et, par suite,

$$H_1=-H.$$

Il est évident que si l'on permutait deux groupes d'indices, le signe et la valeur de H resteraient les mêmes.

Application.

Désignons par $q_1, q_2, \ldots, q_n$, n variables indépendantes en fonction desquelles sont exprimées les coordonnées des différents points d'un système en mouvement, par T la demi-somme des forces vives et par $p_1, p_2, \ldots, p_n$ les quantités

$$\frac{dT}{dq'_1}, \quad \frac{dT}{dq'_2}, \ldots, \quad \frac{dT}{dq'_n}.$$

On sait que les formules pour la variation des constantes arbitraires, quand on a égard aux forces perturbatrices, contiennent des expressions analogues à l'une ou à l'autre des deux suivantes :

$$[a_i, a_s] = \Sigma_r \left(\frac{dp_r}{da_i} \frac{dq_r}{da_s} - \frac{dp_r}{da_s} \frac{dq_r}{da_i} \right),$$

$$(a_i, a_s) = \Sigma_r \left(\frac{da_i}{dp_r} \frac{da_s}{dq_r} - \frac{da_i}{dq_r} \frac{da_s}{dp_r} \right),$$

où r doit recevoir les valeurs $1, 2, \ldots, 2n$, et où $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ sont $2n$ constantes arbitraires introduites par l'intégration des formules du mouvement, en y supposant nulles les forces perturbatrices. M. Cauchy a démontré (*) que ces expressions sont liées par $2n$ groupes d'équations de la forme du suivant :

$$(79) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{r,1}\ c_{1,1} + a_{r,2}\ c_{1,2} + \ldots + a_{r,2n}\ c_{1,2n} = 0, \\ a_{r,1}\ c_{2,1} + a_{r,2}\ c_{2,2} + \ldots + a_{r,2n}\ c_{2,2n} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r,1}\ c_{r,1} + a_{r,2}\ c_{r,2} + \ldots + a_{r,2n}\ c_{r,2n} = 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r,1}\ c_{2n,1} + a_{r,2}\ c_{2n,2} + \ldots + a_{r,2n}\ c_{2n,2n} = 0, \end{array} \right.$$

(*) *Journal* de LIOUVILLE, tome II. *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, juillet 1833.

où l'on fait, pour abréger,

$$[a_i, a_s] = c_{i,s}, \quad (a_i, a_s) = a_{i,s}.$$

Les expressions $c_{i,s}$, $a_{i,s}$ vérifient évidemment les relations

$$c_{s,s} = a_{s,s} = 0, \quad c_{i,s} = -c_{s,i}, \quad a_{i,s} = -a_{s,i},$$

et, conséquemment, les deux déterminants

$$P = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,2n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{2n,1} & a_{2n,2} & \ldots & a_{2n,2n} \end{vmatrix}, \quad Q = \begin{vmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \ldots & c_{1,2n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \ldots & c_{2,2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{2n,1} & c_{2n,2} & \ldots & c_{2n,2n} \end{vmatrix}$$

sont des déterminants gauches symétriques d'ordre pair.

Observons que, d'après (79), il existe entre P et Q la relation toute pareille

$$PQ = 1,$$

et que, de ces mêmes équations (79), on déduit

$$a_{r,s} = \frac{1}{Q} \frac{dQ}{dc_{r,s}},$$

ou bien en faisant $Q = K^2$ et observant que l'équation (78), donne

$$\frac{dQ}{dc_{r,s}} = K \frac{dK}{dc_{r,s}},$$

on peut écrire

$$a_{r,s} = \frac{1}{K} \frac{dK}{dc_{r,s}},$$

équation qui donnera tous les (a_r, a_s) en fonction des $[a_r, a_s]$.

L'équation (76), à cause des deux propriétés démontrées pour les déterminants gauches symétriques, acquiert, quand on suppose P un déterminant gauche quelconque, une des deux formes :

pour n pair,

$$P = P_0 + \Sigma_r \Sigma_s a_{r,r} a_{s,s} (({}^{(2)} P_{i,i})_0 + \ldots + a_{1,1} a_{2,2} \ldots a_{n,n},$$

pour n impair,

$$P = \Sigma_r \; a_{r,r} \; (({}^{(1)} P_{i,i})_0 + \ldots + a_{1,1} a_{2,2} \ldots a_{n,n}.$$

Si les éléments principaux sont tous égaux à l'unité, ces deux dernières formules deviennent

$$P = P_0 + \Sigma_i (({}^{(2)} P_{i,i})_0 + \ldots + 1,$$
$$P = \Sigma_i (({}^{(1)} P_{i,i})_0 + \Sigma_i (({}^{(3)} P_{i,i})_0 + \ldots + 1,$$

et comme les déterminants gauches symétriques d'ordre pair P_0, $(({}^{(1)} P_{i,i})_0$, $(({}^{(2)} P_{i,i})$, ..., sont des carrés, le déterminant P sera égal, tant dans le cas de n pair que dans celui de n impair, à une somme de carrés.

Exemple. — Pour $n = 4$,

$$P = (a_{1,2} a_{3,4} - a_{1,3} a_{2,4} + a_{1,4} a_{2,3})^2$$
$$+ a_{1,2}^2 + a_{1,3}^2 + a_{1,4}^2 + a_{2,3}^2 + a_{2,4}^2 + a_{3,4}^2 + 1,$$

et pour $n = 3$,

$$P = a_{1,2}^2 + a_{1,3}^2 + a_{2,3}^2 + 1.$$

Considérons les deux groupes d'équations

$$(80) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{1,1} \; x_1 + a_{1,2} \; x_2 + \ldots + a_{1,n} \; x_n = u, \\ a_{2,1} \; x_1 + a_{2,2} \; x_2 + \ldots + a_{2,n} \; x_n = u_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n,1} \; x_1 + a_{n,2} \; x_2 + \ldots + a_{n,n} \; x_n = u_n, \\ a_{1,1} \; x_1 + a_{2,1} \; x_2 + \ldots + a_{n,1} \; x_n = v_1, \\ a_{1,2} \; x_1 + a_{2,2} \; x_2 + \ldots + a_{n,2} \; x_n = v_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1,n} \; x_1 + a_{2,n} \; x_2 + \ldots + a_{n,n} \; x_n = v_n, \end{array} \right.$$

où l'on suppose

$$a_{r,r} = 1 \quad a_{r,s} + a_{s,r} = 0.$$

En multipliant les équations du premier système respectivement par

$$c_{r,1}, \quad c_{r,2}, \ldots, \quad c_{r,n},$$

et ajoutant les résultats, on aura

$$(81) \quad \begin{cases} h_{r,1}\, x_1 + h_{r,2}\, x_2 + \ldots + h_{r,n}\, x_n = c_{r,1}\, u_1 + c_{r,2}\, u_2 \\ \qquad + \ldots + c_{r,n}\, u_n, \end{cases}$$

où l'on a fait

$$(82) \qquad a_{1,s}\, c_{r,1} + a_{2,s}\, c_{r,2} + \ldots + a_{n,s}\, c_{r,n} = h_{r,s}.$$

Désignons par P le déterminant gauche formé avec les éléments $a_{r,s}$, et, ayant fait $\alpha_{r,s} = \frac{dP}{d\,a_{r,s}}$, supposons que l'on ait

$$(83) \quad \begin{cases} P\, c_{r,1} = 2\, \alpha_{1,r}, & P\, c_{r,2} = 2\, \alpha_{2,r} \ldots, \\ P\, c_{r,r} = 2\, \alpha_{r,r} - P \ldots, & P\, c_{r,n} = 2\, \alpha_{n,r}, \end{cases}$$

il viendra, d'après (82),

$$h_{r,r} = 1, \quad h_{r,s} = - a_{r,s},$$

et, par suite, l'équation (81) se transformera dans

$$a_{1,r}\, x_1 + a_{2,r}\, x_2 + \ldots + a_{n,r}\, x_n = c_{r,1}\, u_1 + c_{r,2}\, u_2 + \ldots + c_{r,n}\, u_n.$$

On aura donc, par l'inspection des équations (80),

$$v_1 = c_{1,1}\, u_1 + c_{1,2}\, u_2 + \ldots + c_{1,n}\, u_n,$$
$$v_2 = c_{2,1}\, u_1 + c_{2,2}\, u_2 + \ldots + c_{2,n}\, u_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$v_n = c_{n,1}\, u_1 + c_{n,2}\, u_2 + \ldots + c_{n,n}\, u_n.$$

En opérant sur le second groupe des équations (80), comme on vient de le faire pour le premier, on obtiendra

$$u_1 = c_{1,1}\, v_1 + c_{2,1}\, v_2 + \ldots + c_{n,1}\, v_n,$$
$$u_2 = c_{1,2}\, v_1 + c_{2,2}\, v_2 + \ldots + c_{n,2}\, v_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$u_n = c_{1,n}\, v_1 + c_{2,n}\, v_2 + \ldots + c_{n,n}\, v_n.$$

Du rapprochement de ces deux derniers groupes, il résulte que les coefficients $c_{r,s}$ sont liés par les $\frac{n(n+1)}{2}$ équations

$$(84)\quad \left\{ \begin{array}{l} c_{1,r}\, c_{1,s} + c_{2,r}\, c_{2,s} + \ldots + c_{n,r}\, c_{n,s} = 0, \\ c^2_{1,r} + c^2_{2,r} + \ldots + c^2_{n,r} = 1, \end{array} \right.$$

et, comme le nombre de ces coefficients est n^2, un nombre $\frac{n(n-1)}{2}$ d'entre eux resteront arbitraires, et l'on pourra déterminer les $\frac{n(n+1)}{2}$ autres en fonction de ceux-là; ou encore on pourra déterminer tous les n^2 coefficients en fonction de $\frac{n(n-1)}{2}$ quantités arbitraires. Les valeurs des coefficients $c_{r,s}$ fournies par (83), satisfont précisément à ces conditions, puisqu'elles vérifient évidemment les équations (84); et les quantités $a_{r,s}$, en fonction desquelles ces coefficients sont donnés, sont en nombre $\frac{n(n-1)}{2}$.

Exemple. — Soit

$$h = \begin{vmatrix} 1 & \nu & -\mu \\ -\nu & 1 & \lambda \\ \mu & -\lambda & 1 \end{vmatrix} = 1 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2,$$

on aura les neuf équations

$$(85)\quad \left\{ \begin{array}{lll} ha_1 = 1 + \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2, & hb_1 = 2(\lambda\mu - \nu), & hc_1 = 2(\lambda\nu + \mu), \\ ha_2 = 2(\lambda\mu + \nu), & hb_2 = 1 + \mu^2 - \lambda^2 - \nu^2, & hc_2 = 2(\mu\nu - \lambda), \\ ha_3 = 2(\lambda\nu - \mu), & hb_3 = 2(\mu\nu + \lambda), & hc_3 = 1 + \nu^2 - \lambda^2 - \mu^2, \end{array} \right.$$

et les quantités $a_1, a_2, \ldots$, liées par les six équations

$$\begin{array}{ll} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1, & a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0, \\ a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 1, & a_1 a_3 + b_1 b_3 + c_1 c_3 = 0, \\ a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 = 1, & a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3 = 0, \end{array}$$

pourront représenter les neuf cosinus des angles que deux systèmes d'axes rectangulaires comprennent entre eux. Dans ce cas, les quantités arbitraires λ, μ, ν sont susceptibles de recevoir une interprétation géométrique, comme l'a fait voir M. Rodrigues (*).

Il est bon d'observer que dans le cas où deux axes de l'un des systèmes ne feraient pas entre eux un angle droit, c'est-à-dire dans le cas où

$$a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3 = \omega,$$

on pourrait déterminer les valeurs des neuf cosinus en fonction des trois quantités λ, μ, ν et de ω; car il est permis de conserver à six de ces cosinus, par exemple à a_1, b_1, c_1, a_3, b_3, c_3 leurs valeurs précédentes; et les valeurs des trois cosinus a_2, b_2, c_2 seront données en fonction de λ, μ, ν, ω au moyen des équations connues

$$a_1 (1 - \omega^2) = b_2 c_3 - b_3 c_2, \qquad b_1 (1 - \omega^2) = c_2 a_3 - c_3 a_2,$$
$$c_1 (1 - \omega^2) = a_2 b_3 - a_3 b_2, \qquad a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 1.$$

Applications.

1°. *Théorème.* — Le déterminant

$$H = \begin{vmatrix} c_{1,1} - 1 & c_{1,2} & \ldots & c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} - 1 & \ldots & c_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n,1} & c_{n,2} & \ldots & c_{n,n} - 1 \end{vmatrix}$$

est egal à zéro pour n impair, et égal à $2^n \frac{P_0}{P}$ pour n pair.

En effet, en substituant dans H pour $c_{1,1}$, $c_{2,2}$, ...,

(*) *Journal* de Liouville, tome V. Les formules trouvées par M. Rodrigues ne diffèrent que par la forme de celles données par Euler et par Lexell dans le tome XX des *Novi Commentarii Academiæ Petropolitanæ*, 1775.

leurs valeurs (83), il vient

$$H = \frac{2^n}{P^n} \begin{vmatrix} \alpha_{1,1} - P & \alpha_{2,1} & \dots & \alpha_{n,1} \\ \alpha_{1,2} & \alpha_{2,2} - P & \dots & \alpha_{n,2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1,n} & \alpha_{2,n} & \dots & \alpha_{n,n} - P \end{vmatrix}$$

et en multipliant ce déterminant par le déterminant P, on obtient aisément

$$H = (-1)^n \frac{2^n}{P} \begin{vmatrix} 0 & a_{1,2} & a_{1,3} \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & 0 & a_{2,3} \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} \dots & 0 \end{vmatrix}$$

Maintenant si n est impair, le déterminant du second membre étant gauche symétrique et d'ordre impair sera égal à zéro et l'on aura $H = 0$, et si n est pair on aura $H = 2^n \frac{P_0}{P}$. (V. p. 144)

Dans le cas de $n = 3$, ce théorème renferme la démonstration d'une propriété énoncée par Euler et qui a lieu dans le mouvement d'un corps rigide (*). Cette propriété consiste en ce qu'il est toujours possible d'assigner une droite passant par un point arbitraire du corps (le centre), mobile avec lui et telle, qu'au bout d'un temps fini quelconque elle se trouve parallèle à sa direction initiale. En désignant par x, y, z les coordonnées d'un point du corps par rapport à trois axes fixement attachés à ce corps, les cosinus des angles que la droite passant par ce point et par le centre fait à l'origine du mouvement avec trois axes fixes dans l'espace coïncidant à ce même instant avec les axes mobiles,

---

(*) *Theoria motus corporum rigidorum*, 1740. Cette propriété a été démontrée par Piola, au moyen des formules de Monge, dans un Mémoire publié dans les *Actes de la Société Italienne des Sciences*, 1839.

ces cosinus, dis-je, ont pour expression

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

et les cosinus des angles que la même droite fera avec ces axes fixes au bout d'un temps fini quelconque seront

$$\frac{a_1 x+b_1 y+c_1 z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad \frac{a_2 x+b_2 y+c_2 z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad \frac{a_3 x+b_3 y+c_3 z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

a_1, a_2,..., désignant les neuf cosinus des angles que, etc. Pour le parallélisme des deux directions de la droite dans ses deux positions, il faudra donc que l'on ait identiquement

$$x = a_1 x + b_1 y + c_1 z,$$
$$y = a_2 x + b_2 y + c_2 z,$$
$$z = a_3 x + b_3 y + c_3 z,$$

et, par suite,

$$\begin{vmatrix} a_1 - 1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 - 1 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 - 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui a effectivement lieu d'après le théorème démontré.

Il n'est pas inutile de faire voir comment on peut arriver directement à l'interprétation géométrique des indéterminées λ, μ, ν dont on a parlé un peu plus haut. A cet effet, remarquons que les équations (85) donnent

$$\lambda a_1 + \mu b_1 + \nu c_1 = \lambda,$$
$$\lambda a_2 + \mu b_2 + \nu c_2 = \mu,$$
$$\lambda a_3 + \mu b_3 + \nu c_3 = \nu.$$

On pourra donc poser

$$\lambda = k\cos\alpha,\quad \mu = k\cos\beta,\quad \nu = k\cos\gamma,$$

k étant une indéterminée, et α, β, γ les angles que la droite qui reste parallèle à elle-même dans les deux positions du corps fait avec trois axes liés invariablement à ce corps. Si nous désignons par θ l'angle dièdre compris d'un côté entre le plan passant par cette droite et un des axes fixés dans le corps dans la position initiale, et d'un autre côté entre le plan déterminé par les mêmes droites quand le corps occupe sa seconde position, angle qui doit rester invariable quel que soit l'axe que l'on considère, nous aurons par une formule connue

$$a_1 = \sin^2\alpha \cos\theta + \cos^2\alpha,$$
$$b_2 = \sin^2\beta \cos\theta + \cos^2\beta,$$
$$c_3 = \sin^2\gamma \cos\theta + \cos^2\gamma;$$

d'où

$$a_1 + b_2 + c_3 = 1 + 2\cos\theta,$$

et, d'après (85),

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\theta.$$

La quantité k étant ainsi déterminée, on a ensuite

$$\lambda = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\theta\cos\alpha, \quad \mu = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\theta\cos\beta, \quad \nu = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\theta\cos\gamma.$$

Observons que le théorème mécanique d'Euler revient à cet autre purement géométrique : *Étant donnés deux systèmes d'axes rectangulaires ayant la même origine, on peut déterminer une droite passant par cette origine et telle, qu'une rotation autour de cette droite amène l'un des systèmes à coïncider avec le second.* Il est évident que l'angle θ est la mesure de cette rotation.

2°. Soient représentés par a_1, b_1, c_1 ; a_2, b_2, c_2 ; a_3, b_3, c_3 les cosinus des angles que trois axes rectangulaires liés à un corps solide en mouvement font avec trois axes fixes dans l'espace, et désignons par p, q, r les composantes de la vitesse angulaire du corps relatives aux axes mobiles. On a,

comme on sait,

$$p = a_3 a'_2 + b_3 b'_2 + c_3 c'_2,$$
$$q = a_1 a'_3 + b_1 b'_3 + c_1 c'_3,$$
$$r = a_2 a'_1 + b_2 b'_1 + c_2 c'_1,$$

et, en substituant les valeurs (85),

$$hp = 2(\mu'\nu - \mu\nu' - \lambda'), \quad hq = 2(\nu'\lambda - \nu\lambda' - \mu'),$$
$$hr = 2(\lambda'\mu - \lambda\mu' - \nu');$$

d'où

$$(86) \quad \begin{cases} \lambda' = \frac{1}{2}(r\mu - q\nu - p - \lambda m), \\ \mu' = \frac{1}{2}(p\nu - r\lambda - q - \mu m), \\ \nu' = \frac{1}{2}(q\lambda - p\mu - r - \nu m), \end{cases}$$

en faisant, pour abréger,

$$\lambda p + \mu q + \nu r = m.$$

Ces dernières équations, respectivement multipliées par λ, μ, ν et ajoutées, donnent sans difficulté

$$h' + mh = 0,$$

puis, multipliées par p, q, r et ajoutées,

$$\omega^2 + m^2 = -2(\lambda' p + \mu' q + \nu' r),$$

ω désignant la vitesse angulaire du corps.

Lorsque le corps tourne autour d'un point fixe et qu'on prend pour les axes mobiles les axes principaux du corps, en désignant par A, B, C les moments principaux d'inertie et par T la demi-somme des forces vives, on a

$$T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2),$$

et en posant

$$u = \frac{dT}{d\lambda'}, \quad v = \frac{dT}{d\mu'}, \quad w = \frac{dT}{d\nu'},$$

on a

$$(87) \quad \begin{cases} -\frac{1}{2} h u = Ap + Bq\nu - Cr\mu, \\ -\frac{1}{2} h v = -Ap\nu + Bq + Cr\lambda, \\ -\frac{1}{2} h w = Ap\mu - Bq\lambda + Cr; \end{cases}$$

d'où

$$2Ap = v\nu - w\mu - u - \lambda\sigma, \quad 2Bq = w\lambda - u\nu - v - \mu\sigma,$$
$$2Cr = u\mu - v\lambda - w - \nu\sigma,$$

en faisant

$$\sigma = \lambda u + \mu v + \nu w.$$

Si maintenant on désigne par U la fonction des forces, on aura, comme l'on sait,

$$u' = -\frac{d(T-U)}{d\lambda}, \quad v' = -\frac{d(T-U)}{d\mu}, \quad w' = -\frac{d(T-U)}{d\nu};$$

et, par conséquent,

$$u' = \frac{1}{2}(p\sigma + um + rv - qw) + \frac{dU}{d\lambda},$$
$$v' = \frac{1}{2}(q\sigma + vm + pw - ru) + \frac{dU}{d\mu},$$
$$w' = \frac{1}{2}(r\sigma + wm + qu - pv) + \frac{dU}{d\nu}.$$

Ces équations, conjointement avec (86), sont les équations différentielles du mouvement d'un corps autour d'un point fixe présentées sous la forme que leur a assignée Hamilton.

Si le corps n'est sollicité que par des forces instantanées, en désignant par ξ, η, ζ les angles que l'axe du couple ac-

célérateur, l'axe du couple d'impulsion et l'axe instantané de rotation font avec la droite dont il a été question à la fin de l'application 1° (droite que M. Cayley a nommée *axe résultant*); en désignant en outre par g, l, ω les moments du couple accélérateur, du couple d'impulsion et la vitesse angulaire du corps et posant

$$Ap\lambda + Bq\mu + Cr\nu = \psi, \qquad Ap'\lambda + Bq'\mu + Cr'\nu = \varphi,$$

on a

$$\varphi = g \operatorname{tang} \frac{1}{2}\theta . \cos\xi, \qquad \psi = l \operatorname{tang} \frac{1}{2}\theta . \cos\eta,$$

$$m = \omega \operatorname{tang} \frac{1}{2}\theta . \cos\zeta,$$

et comme en multipliant les équations (87) respectivement par λ, μ, ν et ajoutant les résultats, on obtient

$$h\sigma + 2\psi = 0,$$

on aura encore

$$\sigma + l \sin\theta . \cos\eta = 0.$$

L'utilité de ces formules dans l'étude du mouvement autour d'un point fixe d'un corps sollicité par des forces instantanées est rendue entièrement manifeste par les résultats obtenus par M. Cayley sur ce sujet (*).

Un déterminant P dont les éléments conjugués sont assujettis à la condition

$$a_{r,s} = a_{s,r},$$

se nomme déterminant *symétrique*.

Il suit de là qu'une puissance paire d'un déterminant quelconque est un déterminant symétrique. Et comme dans un déterminant symétrique P les éléments situés dans la $r^{ième}$ colonne sont respectivement égaux à ceux situés dans

(*) *The Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, tome I, 1846.

la $s^{ième}$ ligne, on aura

$$\frac{dP}{da_{r,s}} = \frac{dP}{da_{s,r}},$$

c'est-à-dire le déterminant à éléments réciproques d'un déterminant symétrique est lui-même symétrique. Il en résulte que les valeurs de x_1, x_2,..., x_n, déduites du système d'équations algébriques linéaires (16, § IV) prendront, dans le cas de $a_{r,s} = a_{s,r}$, la forme suivante :

$$Px_1 = u_1 \frac{dP}{da_{1,1}} + \frac{1}{2} u_2 \frac{dP}{da_{1,2}} + \ldots + \frac{1}{2} u_n \frac{dP}{da_{1,n}},$$

$$Px_2 = \frac{1}{2} u_1 \frac{dP}{da_{1,2}} + u_2 \frac{dP}{da_{2,2}} + \ldots + \frac{1}{2} u_n \frac{dP}{da_{2,n}},$$

. . . .

$$Px_n = \frac{1}{2} u_1 \frac{dP}{da_{1,n}} + \frac{1}{2} u_2 \frac{dP}{da_{2,n}} + \ldots + u_n \frac{dP}{da_{n,n}},$$

où $\frac{dP}{da_{r,s}}$ représente la dérivée relative à $a_{r,s}$ du développement du déterminant symétrique P.

La formule (14), lorsque P est un déterminant symétrique, donne

$$P \frac{d^2 P}{da_{r,r}\, da_{s,s}} = \frac{dP}{da_{r,r}} \frac{dP}{da_{s,s}} - \left(\frac{dP}{da_{r,s}}\right)^2,$$

et en supposant $\frac{dP}{da_{r,r}} = 0$, on aura

$$P \frac{d^2 P}{da_{r,r}\, da_{s,s}} = - \left(\frac{dP}{da_{r,s}}\right)^2,$$

c'est-à-dire que les deux déterminants symétriques P et $\frac{d^2 P}{da_{r,r}\, da_{s,s}}$ seront de signes contraires.

On doit encore ranger dans la classe des déterminants

symétriques ceux de la forme

$$H_{2n-1} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ a_2 & a_3 & \ldots & a_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n & a_{n+1} & \ldots & a_{2n-1} \end{vmatrix}$$

qui jouissent de la propriété exprimée par l'équation

$$\frac{d\,H_{2n-1}}{d\,a_{2n-1}} = H_{2n-3}.$$

La propriété caractéristique de ces déterminants appartient exclusivement à la théorie des *invariants*.

Application. — En désignant par s_r la somme des puissances $r^{ièmes}$ des racines de l'équation

$$V(x) = a_n + a_{n-1}\,x + \ldots + a_1\,x^{n-1} + x^n = 0,$$

on a les relations connues

$$\begin{array}{l} a_n\,s_0 + a_{n-1}\,s_1 + \ldots + a_1\,s_{n-1} + s_n = 0, \\ a_n\,s_1 + a_{n-1}\,s_2 + \ldots + a_1\,s_n + s_{n+1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n\,s_{n-1} + a_{n-1}\,s_n + \ldots + a_1\,s_{2n-2} + s_{2n-1} = 0, \end{array}$$

d'où l'on déduit, en éliminant les coefficients $a_1, a_2, \ldots a_n$ entre ces équations et $V(x) = 0$,

$$V(x) = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_n \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{n-1} & s_n & \ldots & s_{2n-1} \\ 1 & x & \ldots & x_n \end{vmatrix} = 0.$$

Observons que, si aux éléments de la seconde colonne de ce déterminant on ajoute respectivement ceux de la première multipliés par $-x$, aux éléments de la troisième colonne ceux de la seconde multipliés par $-x$, et ainsi

de suite, la valeur du déterminant n'est pas altérée et que, par conséquent,

$$V(x) = \begin{vmatrix} s_1 - s_0 x & s_2 - s_1 x \dots & s_n - s_{n-1} x \\ s_2 - s_1 x & s_3 - s_2 x \dots & s_{n+1} - s_n x \\ \dots & \dots & \dots \\ s_n - s_{n-1} x & s_{n+1} - s_n x \dots & s_{2n-1} - s_{2n-2} x \end{vmatrix} = 0.$$

Représentons ce déterminant par

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

et par V_r le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,r} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r,1} & a_{r,2} & \dots & a_{r,r} \end{vmatrix}$$

Cela posé, on a le suivant.

Théorème. — Les termes de la série

$$V_n,\ V_{n-1},\ V_{n-2},\dots,\ V_r,\dots,\ V_1,\ 1$$

jouissent de la propriété caractéristique des résidus de M. Sturm, c'est-à-dire, si une valeur de x annule la fonction V_r, les fonctions V_{r+1}, V_{r-1} pour cette même valeur de x sont de signes contraires.

En effet, comme

$$V_r = \frac{d\,V_{r+1}}{d\,a_{r+1,r+1}}, \quad V_{r-1} = \frac{d^2\,V_{r+1}}{d\,a_{r,r}\,d\,a_{r+1,r+1}},$$

on aura, par l'équation (14),

$$V_{r+1}\,.\,V_{r-1} = \frac{d\,V_{r+1}}{d\,a_{r,r}}\,V_r - \left(\frac{d\,V_{r+1}}{d\,a_{r,r+1}}\right)^2,$$

et, conséquemment, pour toute valeur de x vérifiant l'équation $V_r = 0$, il viendra

$$V_{r+1}\ V_{r-1} = -\left(\frac{dV_{r+1}}{da_{r,r+1}}\right)^2,$$

c'est-à-dire que V_{r+1} et V_{r-1} seront de signes contraires.

§ IX. — *Des déterminants des racines des équations algébriques, et des déterminants des intégrales particulières des équations différentielles linéaires.*

Soit

$$x^n + A_{n-1}\ x^{n-1} + \ldots + A_1\ x + A_0 = 0$$

une équation algébrique du $n^{ième}$ degré ayant pour racines α_1, α_2, ..., α_n, on a identiquement

$$\alpha_1^n + A_{n-1}\ \alpha_1^{n-1} + \ldots + A_1\ \alpha_1 + A_0 = 0,$$

$$\alpha_2^n + A_{n-1}\ \alpha_2^{n-1} + \ldots + A_1\ \alpha_2 + A_0 = 0,$$

. . . .

$$\alpha_n^n + A_{n-1}\ \alpha_n^{n-1} + \ldots + A_1\ \alpha_n + A_0 = 0.$$

Multipliant ces équations respectivement par les indéterminées $a_1, a_2, \ldots, a_n$, ajoutant les résultats et posant

$$(88)\quad \begin{cases} a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 0, \\ a_1\ \alpha_1 + a_2\ \alpha_2 + \ldots + a_n\ \alpha_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1\ \alpha_1^r + a_2\ \alpha_2^r + \ldots + a_n\ \alpha_n^r = z, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1\ \alpha_1^{n-1} + a_2\ \alpha_2^{n-1} + \ldots + a_n\ \alpha_n^{n-1} = 0, \end{cases}$$

il en résulte évidemment

$$A_r = -\frac{1}{z}\left(a_1\ \alpha_1^n + a_2\ \alpha_2^n + \ldots + a_n\ \alpha_n^n\right).$$

Ayant fait actuellement

$$\Delta = \pm \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

on aura par les équations (88)

$$a_1 = \frac{z}{\Delta}\frac{dV}{d\alpha_1^r}, \quad a_2 = \frac{z}{\Delta}\frac{d\Delta}{d\alpha_2^r}, \dots, \quad a_n = \frac{z}{\Delta}\frac{d\Delta}{d\alpha_n^r},$$

et, par suite, en substituant,

$$A_r = -\frac{1}{\Delta}\left(\alpha_1^n \frac{d\Delta}{d\alpha_1^r} + \alpha_2^n \frac{d\Delta}{d\alpha_2^r} + \dots + \alpha_n^n \frac{d\Delta}{d\alpha_n^r}\right) = \pm \Sigma \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-r},$$

la caractéristique Σ représentant la somme des combinaisons $n-r$ à $n-r$ des racines $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

Si l'on suppose $r = n-1$, et qu'on représente par $F(x)$ l'expression

$$(x-\alpha_1), (x-\alpha_2), \dots, (x-\alpha_n),$$

les équations (88) sont satisfaites en prenant

$$a_1 = \frac{z}{F'(\alpha_1)}, \quad a_2 = \frac{z}{F'(\alpha_2)}, \dots, \quad a_n = \frac{z}{F'(\alpha_n)},$$

d'où résulte

$$\frac{1}{F'(\alpha_1)} = \frac{1}{\Delta}\frac{d\Delta}{d\alpha_1^{n-1}}, \quad \frac{1}{F'(\alpha_2)} = \frac{1}{\Delta}\frac{d\Delta}{d\alpha_2^{n-1}}, \dots, \quad \frac{1}{F'(\alpha_n)} = \frac{1}{\Delta}\frac{d\Delta}{d\alpha_n^{n-1}}.$$

Observons que

$$\frac{d\Delta}{d\alpha_1^{n-1}} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_n \\ \alpha_2^2 & \alpha_3^2 & \dots & \alpha_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_2^{n-2} & \alpha_3^{n-2} & \dots & \alpha_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Par conséquent, en désignant ce déterminant par Δ_1 et par $F_1(x)$ l'expression

$$(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\dots(x-\alpha_n),$$

nous aurons

$$\frac{1}{F'_1(\alpha_2)} = \frac{1}{\Delta_1}\frac{d\Delta_1}{d\alpha_2^{n-2}}.$$

Pareillement, en posant

$$\frac{d\Delta_1}{d\alpha_2^{n-2}} = \Delta_2, \quad \frac{d\Delta_2}{d\alpha_3^{n-3}} = \Delta_3, \dots, \quad \frac{d\Delta_{n-2}}{d\alpha_{n-1}} = \Delta_{n-1} = 1,$$

et

$$F_2(x) = (x-\alpha_3)\dots(x-\alpha_n), \quad F_3(x) = (x-\alpha_4)\dots(x-\alpha_n), \dots$$
$$F_{n-2}(x) = (x-\alpha_{n-1})(x-\alpha_n),$$

nous obtiendrons

$$\frac{1}{F'_2(\alpha_3)} = \frac{1}{\Delta_2}\frac{d\Delta_2}{d\alpha_3^{n-3}}, \quad \frac{1}{F'_3(\alpha_4)} = \frac{1}{\Delta_3}\frac{d\Delta_3}{d\alpha_4^{n-4}}, \dots,$$
$$\frac{1}{F'_{n-2}(\alpha_{n-1})} = \frac{1}{\Delta_{n-2}},$$

et ces équations multipliées membre à membre donnent

$$\Delta = F'(\alpha_1)\, F'_1(\alpha_2)\, F'_2(\alpha_3) \dots F'_{n-2}(\alpha_{n-1}),$$

c'est-à-dire

$$\Delta = (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)\ldots(\alpha_1 - \alpha_n)(\alpha_2 - \alpha_3)\ldots(\alpha_2 - \alpha_n)(\alpha_3 - \alpha_4)\ldots(\alpha_{n-1} - \alpha_n),$$

importante relation que l'on doit à Vandermonde.

On peut encore arriver à ce dernier résultat, en s'appuyant sur les seules propriétés des déterminants. En effet, en faisant subir au déterminant Δ la transformation de l'application 3° du § V, on a

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 - \alpha_2 & \alpha_2 - \alpha_3 & \ldots & \alpha_{n-1} - \alpha_n \\ \alpha_1^2 - \alpha_2^2 & \alpha_2^2 - \alpha_3^2 & \ldots & \alpha_{n-1}^2 - \alpha_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1^{n-1} - \alpha_2^{n-1} & \alpha_2^{n-1} - \alpha_3^{n-1} & \ldots & \alpha_{n-1}^{n-1} - \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

ou, en divisant la première colonne par $\alpha_1 - \alpha_2$, la seconde par $\alpha_2 - \alpha_3$, etc.,

$$\Delta = (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_2 - \alpha_3)\ldots(\alpha_{n-1} - \alpha_n) \begin{vmatrix} 1 & \ldots\ldots & 1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 & \ldots\ldots & \alpha_{n-1} + \alpha_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1^{n-2} + \alpha_1^{n-3}\alpha_2 + \ldots + \alpha_2^{n-2} & \ldots & \alpha_{n-1}^{n-2} + \alpha_{n-1}^{n-3}\alpha_n + \ldots + \alpha_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

Effectuant de nouveau sur ce dernier déterminant l'opération mentionnée, c'est-à-dire en divisant la première colonne par $\alpha_1 - \alpha_3$, la seconde par $\alpha_2 - \alpha_4$, etc., on obtient

$$\Delta = (\alpha_1 - \alpha_2)\ldots(\alpha_{n-1} - \alpha_n)(\alpha_1 - \alpha_3)\ldots(\alpha_{n-2} - \alpha_n) \begin{vmatrix} 1 & \ldots\ldots \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 & \ldots\ldots \\ \ldots & \ldots \\ \alpha_1^{n-3} + \alpha_1^{n-2}\alpha_3 + \ldots + \alpha_2(\alpha_1^{n-4} + \ldots) + \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

et, en répétant la même opération $(n-1)$ fois, on parviendra à la valeur de Δ trouvée ci-dessus.

De ce qui précède, on déduit facilement que les valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ qu'on tirerait des équations

$$\begin{array}{llll} & x_1 + & x_2 + \ldots + & x_n = 1, \\ \alpha_1 & x_1 + \alpha_2 & x_2 + \ldots + \alpha_n & x_n = k, \\ \alpha_1^2 & x_1 + \alpha_2^2 & x_2 + \ldots + \alpha_n^2 & x_n = k^2, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1^{n-1} & x_1 + \alpha_2^{n-1} & x_2 + \ldots + \alpha_n^{n-1} & x_n = k^{n-1}, \end{array}$$

peuvent se mettre sous la forme

$$(89) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{(\alpha_2 - k)(\alpha_3 - k)\ldots(\alpha_n - k)}{(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1)\ldots(\alpha_n - \alpha_1)}, \\ x_2 = \dfrac{(\alpha_1 - k)(\alpha_3 - k)\ldots(\alpha_n - k)}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_2)\ldots(\alpha_n - \alpha_2)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \dfrac{(\alpha_1 - k)(\alpha_2 - k)\ldots(\alpha_{n-1} - k)}{(\alpha_1 - \alpha_n)(\alpha_2 - \alpha_n)\ldots(\alpha_{n-1} - \alpha_n)}. \end{array} \right.$$

Désignons par s_r la somme des puissances r des racines de l'équation proposée; en effectuant le carré du déterminant Δ, on obtient

$$\Delta^2 = \mathrm{H} = \left| \begin{array}{llll} s_0 & s_1 & \ldots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{n-1} & s_n & \ldots & s_{2n-2} \end{array} \right|$$

et comme, par l'équation (62), on a

$$^{(n-m)}\mathrm{H}_{r,r} = (^{(n-m)}\Delta_{r,1})^2 + (^{(n-m)}\Delta_{r,2})^2 + \ldots + (^{(n-m)}\Delta_{r,n})^2,$$

si l'on fait attention que

$$^{(n-m)}\Delta_{u,u} = \left| \begin{array}{llll} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_m \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1^{m-1} & \alpha_2^{m-1} & \ldots & \alpha_m^{m-1} \end{array} \right| \qquad ^{(n-m)}\mathrm{H}_{u,u} = \left| \begin{array}{llll} s_0 & s_1 & \ldots & s_{m-1} \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_m \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{m-1} & s_m & \ldots & s_{2m-2} \end{array} \right|$$

il viendra

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 \ldots s_{m-1} \\ s_1 & s_2 \ldots s_m \\ \ldots & \ldots \\ s_{m-1} & s_m \ldots s_{2m-2} \end{vmatrix} = \Sigma \begin{bmatrix} (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)\ldots \\ \times(\alpha_1 - \alpha_m)(\alpha_2 - \alpha_3)\ldots(\alpha_{m-1} - \alpha_m) \end{bmatrix}^2.$$

Applications.

1°. Un déterminant dans lequel les éléments constituant une ligne quelconque sont des intégrales définies prises entre les mêmes limites, ces limites changeant d'une ligne à l'autre, peut se réduire à une intégrale multiple. Dans certains cas, cette transformation, ou la transformation inverse quand elle est exécutable, peut être utile dans la recherche de la valeur du déterminant ou dans celle de l'intégrale multiple. Pour montrer de quelle manière on peut effectuer cette transformation, considérons le déterminant

$$\begin{vmatrix} \int_{a_1}^{a_2} \frac{e^{-x_1}}{\varphi_1(x_1)} dx_1 & \int_{a_1}^{a_2} \frac{e^{-x_2}}{\varphi_2(x_2)} dx_2 \ldots & \int_{a_1}^{a_2} \frac{e^{-x_n}}{\varphi_n(x_n)} dx_n \\ \int_{a_2}^{a_3} \frac{e^{-x_1} x_1}{\varphi_1(x_1)} dx_1 & \int_{a_2}^{a_3} \frac{e^{-x_2} x_2}{\varphi_2(x_2)} dx_2 \ldots & \int_{a_2}^{a_3} \frac{e^{-x_n} x_n}{\varphi_n(x_n)} dx_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \int_{a_n}^{\infty} \frac{e^{-x_1} x_1^{n-1}}{\varphi_1(x_1)} dx_1 & \int_{a_n}^{\infty} \frac{e^{-x_2} x_2^{n-1}}{\varphi_2(x_2)} dx_2 \ldots & \int_{a_n}^{\infty} \frac{e^{-x_n} x_n^{n-1}}{\varphi_n(x_n)} dx_n \end{vmatrix}$$

et observons que tous les termes de son développement seront des intégrales définies multiples de l'ordre n, et que conséquemment ce déterminant pourra se mettre sous la forme

$$\int_{a_1}^{a_2} dx_1 \int_{a_2}^{a_3} dx_2 \ldots \int_{a_n}^{\infty} dx_n \begin{vmatrix} \frac{e^{-x_1}}{\varphi_1(x_1)} & \frac{e^{-x_2}}{\varphi_2(x_2)} \ldots & \frac{e^{-x_n}}{\varphi_n(x_n)} \\ \frac{e^{-x_1} x_1}{\varphi_1(x_1)} & \frac{e^{-x_2} x_2}{\varphi_2(x_2)} \ldots & \frac{e^{-x_n} x_n}{\varphi_n(x_n)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{e^{-x_1} x_1^{n-1}}{\varphi_1(x_1)} & \frac{e^{-x_2} x_2^{n-1}}{\varphi_2(x_2)} \ldots & \frac{e^{-x_n} x_n^{n-1}}{\varphi_n(x_n)} \end{vmatrix}$$

c'est-à-dire que le déterminant en question sera équivalent à l'intégrale multiple

$$\int_{a_1}^{a_2} dx_1 \int_{a_2}^{a_3} dx_2 \ldots \int_{a_n}^{\infty} dx_n \frac{e^{-x_1-x_2\ldots-x_n}}{\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)\ldots\varphi_n(x_n)}\Delta,$$

où

$$\Delta=(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_n)(x_2-x_3)\ldots(x_{n-1}-x_n).$$

En s'appuyant sur cette transformation et sur un théorème concernant les intégrales particulières des équations différentielles linéaires (théorème dû à M. Liouville, et qui sera démontré dans la suite), M. Tissot (*) est parvenu tout récemment à généraliser quelques résultats obtenus par Abel et par M. W. Roberts (**). Les déterminants des intégrales définies avaient déjà été considérés par M. Catalan (***).

2°. La fonction homogène de degré impair à deux variables

$$a_1 x^{2n+1} + (2n+1) a_2 x^{2n} y + \frac{(2n+1)2n}{2} a_3 x^{2n-1} y^2 + \ldots$$
$$+ (2n+1) a_{2n+1} x y^{2n} + a_{2n+2} y^{2n+1}$$

sera dite ramenée à la forme *canonique* lorsqu'on l'aura transformée dans

$$(p_1 x + q_1 y)^{2n+1} + (p_2 x + q_2 y)^{n+1} + \ldots + (p_{n+1} x + q_{n+1} y)^{2n+1}.$$

Les $2(n+1)$ inconnues $p_1, p_2, \ldots, p_{n+1}; q_1, q_2, \ldots, q_{n+1}$ seront déterminées au moyen des $2(n+1)$ équations que l'on obtient en égalant les coefficients des mêmes puissances de x dans les deux expressions. En faisant $q_1 = p_1\alpha_1$, $q_2 = p_2\alpha_2$, $q_{n+1} = p_{n+1}\alpha_{n+1}$, et $p_r^{2n+1} = c_r$, ces $2(n+1)$

(*) *Journal* de M. Liouville.

(**) ABEL, *Œuvres complètes*, tome I, page 93. — *Journal* de M. Liouville, années 1851 et 1852.

(***) Mémoires couronnés par l'Académie de Bruxelles. 1841.

équations seront

$$c_1 + c_2 + \ldots + c_{n+1} = a_1,$$

$$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \ldots + c_{n+1}\alpha_{n+1} = a_2,$$

$$c_1\alpha_1^2 + c_2\alpha_2^2 + \ldots + c_{n+1}\alpha_{n+1}^2 = a_3,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$c_1\alpha_1^{2n+1} + c_2\alpha_2^{2n+1} + \ldots + c_{n+1}\alpha_{n+1}^{2n+1} = a_{2n+2}.$$

Tirant des $(n+1)$ premières de ces équations les valeurs de $c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}$, on obtiendra $(n+1)$ expressions analogues à

$$(90) \qquad c_r = a_1 \frac{d\Delta}{d.\alpha_r^0} + a_2 \frac{d\Delta}{d.\alpha_r} + \ldots + a_{n+1} \frac{d\Delta}{d.\alpha_r^n},$$

où

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1^n & \alpha_2^n & \ldots & \alpha_{n+1}^n \end{vmatrix}$$

et ces valeurs, substituées dans la $(n+2)^{ième}$ équation, donneront

$$a_{n+2} - a_{n+1}\Sigma\alpha_1 + a_n\Sigma\alpha_1\alpha_2 - \ldots \pm a_1\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n+1} = 0,$$

en se rappelant que

$$\alpha_1^{n+1}\frac{d\Delta}{d.\alpha_1^s} + \alpha_2^{n+1}\frac{d\Delta}{d.\alpha_2^s} + \ldots + \alpha_{n+1}^{n+1}\frac{d\Delta}{d.\alpha_{n+1}^s} = \pm\Delta\Sigma\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-s+1}.$$

Pareillement, en éliminant $c_1\alpha_1, c_2\alpha_2, \ldots, c_{n+1}\alpha_{n+1}$ des 2ième, 3ième, ..., $(n+3)^{ième}$ de ces équations, on aura

$$a_{n+3} - a_{n+2}\Sigma\alpha_1 + a_{n+1}\Sigma\alpha_1\alpha_2 - \ldots \pm a_2\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n+1} = 0.$$

En continuant à opérer de la même manière, on obtien-

dra évidemment les $n+1$ équations suivantes :

$$(9^1)\quad\left\{\begin{array}{l} a_{n+2}-a_{n+1}m_1+a_n m_2-\ldots\pm a_1 m_{n+1}=0,\\ a_{n+3}-a_{n+2}m_1+a_{n+1}m_2-\ldots\pm a_2 m_{n+1}=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{2n+2}-a_{2n+1}m_1+a_{2n}m_2-\ldots\pm a_{n+1}m_{n+1}=0,\end{array}\right.$$

où

$$m_1=\Sigma\alpha_1,\quad m_2=\Sigma\alpha_1\alpha_2,\ldots,\quad m_{n+1}=\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n+1}.$$

Observons que les $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}$ seront les racines de l'équation

$$x^{n+1}-x^n m_1+x^{n-1}m_2-\ldots\pm m_{n+1}=0,$$

ou, si l'on veut, de l'équation

$$(9^2)\qquad\begin{vmatrix} x^{n+1} & x^n & \ldots & x & 1\\ a_{n+2} & a_{n+1} & \ldots & a_2 & 1\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{2n+2} & a_{2n+1} & \ldots & a_{n+2} & a_{n+1}\end{vmatrix}=0,$$

que l'on obtient en éliminant les $m_1, m_2, \ldots, m_{n+1}$ de la précédente et de (91). Par la résolution de cette dernière équation, on aura les valeurs de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}$; par suite les équations (90) feront connaître $c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}$, d'où l'on déduira finalement les valeurs requises de $p_1, p_2, \ldots, p_{n+1}, q_1, q_2, \ldots, q_{n+1}$. Remarquons que l'équation (92), moyennant une transformation dont on a déja fait usage, peut se réduire à

$$\begin{vmatrix} a_1 x-a_2 & a_2 x-a_3 & \ldots & a_{n+1}x-a_{n+2}\\ a_2 x-a_3 & a_3 x-a_4 & \ldots & a_{n+2}x-a_{n+3}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n+1}x-a_{n+2} & a_{n+2}x-a_{n+3} & \ldots & a_{2n+1}x-a_{2n+2}\end{vmatrix}=0.$$

Considérons l'équation différentielle linéaire du $n^{ième}$ ordre

$$y^{(n)}+A_{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+A_1 y'+A_0 y=0,$$

dans laquelle $A_{n-1}, A_{n-2}, \ldots, A_0$ sont des fonctions de la

variable par rapport à laquelle sont prises les dérivées. Soient $y_1, y_2, \ldots, y_n$ n intégrales particulières de cette équation. En posant

$$\begin{array}{llll}
a_1 y_1 & + a_2 y_2 & + \ldots + a_n y_n & = 0, \\
a_1 y'_1 & + a_2 y'_2 & + \ldots + a_n y'_n & = 0, \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots \\
a_1 y_1^{(r)} & + a_2 y_2^{(r)} & + \ldots + a_n y_n^{(r)} & = z, \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots \\
a_1 y_1^{(n-1)} & + a_2 y_2^{(n-1)} & + \ldots + a_n y_n^{(n-1)} & = 0,
\end{array}$$

on aura

$$A_r = -\frac{1}{z}\left(a_1 y_1^{(n)} + a_2 y_2^{(n)} + \ldots + a_n y_n^{(n)}\right),$$

ou bien, en tirant des équations précédentes les valeurs de $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et les substituant dans cette dernière,

$$A_r = -\frac{1}{\Delta}\left(y_1^{(n)} \frac{d\Delta}{dy_1^{(r)}} + y_2^{(n)} \frac{d\Delta}{dy_2^{(r)}} + \ldots + y_n^{(n)} \frac{d\Delta}{dy_n^{(r)}}\right),$$

où l'on a fait

$$\Delta = \begin{vmatrix}
y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\
y'_1 & y'_2 & \ldots & y'_n \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)}
\end{vmatrix}$$

En différentiant ce déterminant, on a

$$(93) \quad \Delta' = y_1^{(n)} \frac{d\Delta}{dy_1^{(n-1)}} + y_2^{(n)} \frac{d\Delta}{dy_2^{(n-1)}} + \ldots + y_n^{(n)} \frac{d\Delta}{dy_n^{(n-1)}},$$

et, par suite,

$$A_{n-1} = -\frac{\Delta'}{\Delta},$$

d'où

$$\Delta = C e^{-\int A_{n-1} dx}.$$

Cette formule est due à M. Liouville.

Au moyen de l'équation (93), on obtient facilement les suivantes :

$$\frac{d\Delta}{dy_1^{(n-2)}} = -\left(\frac{d\Delta}{dy_1^{(n-2)}}\right)', \quad \frac{d\Delta}{dy_2^{(n-1)}} = -\left(\frac{d\Delta}{dy_2^{(n-1)}}\right)', \ldots,$$

$$\frac{d\Delta}{dy_n^{(n-2)}} = -\left(\frac{d\Delta}{dy_n^{(n-1)}}\right)',$$

d'où résultent ces autres équations :

$$-\Delta = y_1^{(n-2)}\left(\frac{d\Delta}{dy_1^{(n-1)}}\right)' + y_2^{(n-2)}\left(\frac{d\Delta}{dy_2^{(n-1)}}\right)' + \ldots + y_n^{(n-2)}\left(\frac{d\Delta}{dy_n^{(n-1)}}\right)',$$

$$-\Delta' = y_1^{(n-2)}\left(\frac{d\Delta}{dy_1^{(n-1)}}\right)'' + y_2^{(n-2)}\left(\frac{d\Delta}{dy_2^{(n-1)}}\right)'' + \ldots + y_n^{(n-2)}\left(\frac{d\Delta}{dy_n^{(n-1)}}\right)'',$$

$$o = y_1^{(n-r)}\left(\frac{d\Delta}{dy_1^{(n-1)}}\right)' + y_2^{(n-r)}\left(\frac{d\Delta}{dy_2^{(n-1)}}\right)' + \ldots + y_n^{(n-r)}\left(\frac{d\Delta}{dy_n^{(n-1)}}\right)',$$

dans la dernière desquelles r peut prendre les valeurs 3, 4, ..., n. Il suit de là que dans l'hypothèse de $\Delta = o$, on

a $n-1$ équations qui fournissent les proportions

$$\left(\frac{d\Delta}{dy_1^{(n-1)}}\right)' : \left(\frac{d\Delta}{dy_2^{(n-1)}}\right)' : \ldots : \left(\frac{d\Delta}{dy_n^{(n-1)}}\right)'$$

$$= \frac{d\Delta}{dy_1^{(n-1)}} : \frac{d\Delta}{dy_2^{(n-1)}} : \ldots : \frac{d\Delta}{dy_n^{(n-1)}};$$

et, par suite,

$$\frac{d\Delta}{dy_1^{(n-1)}} : \frac{d\Delta}{dy_2^{(n-1)}} : \ldots : \frac{d\Delta}{dy_n^{(n-1)}} = \alpha_1 : \alpha_2 : \ldots : \alpha_n,$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ étant des constantes. Ces valeurs, substituées dans l'équation identique

$$y_1 \frac{d\Delta}{dy_1^{(n-1)}} + y_2 \frac{d\Delta}{dy_2^{(n-1)}} + \ldots + y_n \frac{d\Delta}{dy_n^{(n-1)}} = 0$$

donnent

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n = 0.$$

L'équation (93) conduit encore aux suivantes :

$$\left(\frac{d\Delta}{dy_r^{(n-2)}}\right)' = -\frac{d\Delta}{dy_r^{(n-3)}} + \frac{d\Delta'}{dy_r^{(n-2)}},$$

$$\left(\frac{d\Delta}{dy_r^{(n-3)}}\right) = -\frac{d\Delta}{dy_r^{(n-4)}} + \frac{d\Delta'}{dy_r^{(n-3)}} \ldots \left(\frac{d\Delta}{dy_r}\right)' = \frac{d\Delta'}{dy_r}.$$

En différentiant la pénultième une fois, l'antépénultième deux fois, et ainsi de suite, puis ajoutant les résultats, il vient

$$\left(\frac{d\Delta}{dy_r^{(s)}}\right)^{(s+1)} = (-1)^s \left[\frac{d\Delta'}{dy_r} - \left(\frac{d\Delta'}{dy_r'}\right)' + \left(\frac{d\Delta'}{dy_r''}\right)'' \cdots \pm \left(\frac{d\Delta'}{dy_r^{(s)}}\right)^{(s)}\right].$$

Applications.

1°. L'équation

$$\Delta = Ce^{-\int A_{n-1}dx}$$

peut s'écrire sous la forme

$$y_n^{(n-1)} \frac{d\Delta}{dy_n^{(n-1)}} + y_n^{(n-2)} \frac{d\Delta}{dy_n^{(n-2)}} + \ldots + y_n \frac{d\Delta}{dy_n} = Ce^{-\int A_{n-1} dx},$$

ou bien, en posant

$$B_r = \frac{d\Delta}{dy_n^{(r)}} : \frac{d\Delta}{dy_n^{(n-1)}},$$

$$(94)\ y_n^{(n-1)} + B_{n-2} y_n^{(n-2)} + \ldots + B_0 y_n = Ce^{-\int A_{n-1} dx} : \frac{d\Delta}{dy_n^{(n-1)}}.$$

Observons que, d'après les relations qui règnent entre les coefficients d'une équation différentielle linéaire et les intégrales particulières de cette même équation, les expressions $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ sont des intégrales particulières de l'équation

$$y_n^{(n-1)} + B_{n-2} y_n^{(n-2)} + \ldots + B_1 y_n' + B_0 y_n = 0,$$

et que conséquemment, en vertu d'une propriété connue des équations différentielles linéaires, l'intégrale complète de l'équation (94) sera

$$y_n = y_1 \alpha_1 + y_2 \alpha_2 + \ldots + y_{n-1} \alpha_{n-1},$$

où

$$\alpha_r = C \int \frac{1}{\Delta_1^2} \frac{d\Delta_1}{dy_r^{(n-2)}} e^{-\int A_{n-1} dx} dx, \quad \Delta_1 = \frac{d\Delta}{dy_n^{(n-1)}}.$$

Ainsi, connaissant $n-1$ intégrales particulières ne équation différentielle linéaire du $n^{ième}$ ordre, on pourra déterminer la $n^{ième}$ au moyen des premières. Cet important théorème est dû à M. Malmsten (*).

2°. En désignant par x, y, z les coordonnées d'un point

(*) Crelle, *Journal für die Mathematik*. Band 39.

d'une ligne à double courbure, par r, ρ les rayons de courbure et de torsion, et faisant, pour abréger,

$$m^2 = x''^2 + y''^2 + z''^2, \quad \Delta = \begin{vmatrix} x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \\ x^{\text{IV}} & y^{\text{IV}} & y^{\text{IV}} \end{vmatrix}$$

on a

$$\frac{r}{\rho} = \frac{1}{m^3}\left(x'\frac{d\Delta}{dx^{\text{IV}}} + y'\frac{d\Delta}{dy^{\text{IV}}} + z'\frac{d\Delta}{dz^{\text{IV}}}\right),$$

les dérivées étant prises par rapport à l'arc. Pour détermi-ner la courbe pour laquelle le rapport $\frac{r}{\rho}$ est constant, on dérive cette dernière équation, ce qui donne

$$(95)\quad \left\{\begin{aligned} & m\left(x'\frac{d\Delta}{dx'''} + y'\frac{d\Delta}{dy'''} + z'\frac{d\Delta}{dz'''}\right) \\ & + 3m'\left(x'\frac{d\Delta}{dx^{\text{IV}}} + y'\frac{d\Delta}{dy^{\text{IV}}} + z'\frac{d\Delta}{dz^{\text{IV}}}\right) = 0. \end{aligned}\right.$$

Mais des équations

$$x'x'' + y'y'' + z'z'' = 0,$$
$$x'x''' + y'y''' + z'z''' = -m^2,$$
$$x'x^{\text{IV}} + y'y^{\text{IV}} + z'z^{\text{IV}} = -3mm',$$

on déduit

$$\Delta x' = -m\left(m\frac{d\Delta}{dx'''} + 3m'\frac{d\Delta}{dx^{\text{IV}}}\right),$$

$$\Delta y' = -m\left(m\frac{d\Delta}{dy'''} + 3m'\frac{d\Delta}{dy^{\text{IV}}}\right),$$

$$\Delta z' = -m\left(m\frac{d\Delta}{dz'''} + 3m'\frac{d\Delta}{dz^{\text{IV}}}\right),$$

et si l'on multiplie ces dernières respectivement par x', y', z', et qu'on ajoute les produits, il vient, en ayant égard à (95),

$$\Delta = 0,$$

et, par suite,

$$ax' + by' + cz' = k,$$

a, b, c, k désignant quatre constantes arbitraires. La ligne cherchée sera donc une hélice tracée sur un cylindre dont les génératrices sont parallèles à une droite donnée (*)

§ X. — *Des déterminants fonctionnels.*

Soient $y_1, y_2, \ldots, y_n$, n fonctions indépendantes entre elles de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$; en formant les dérivées partielles du premier ordre de ces fonctions par rapport à chacune des variables indépendantes, on obtient n^2 quantités analogues à $\frac{dy_r}{dx_s} = y'_r(x_s)$. Le déterminant

$$P = \begin{vmatrix} y'_1(x_1) & y'_1(x_2) \ldots y'_1(x_n) \\ y'_2(x_1) & y'_2(x_2) \ldots y'_2(x_n) \\ \ldots & \ldots \\ y'_n(x_1) & y'_n(x_2) \ldots y'_n(x_n) \end{vmatrix} = \Sigma[\pm y'_1(x_1) y'_2(x_2) \ldots y'_n(x_n)]$$

se nomme déterminant *fonctionnel,* ou déterminant des *dérivées partielles* du premier ordre des fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ par rapport aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

L'ordre du déterminant fonctionnel est égal au nombre des fonctions, et il ne devient moindre que lorsque quelques-unes des fonctions coïncident avec certaines des variables indépendantes. Par exemple, si l'on avait

$$y_{r+1} = x_{r+1}, \quad y_{r+2} = x_{r+2}, \ldots, y_n = x_n,$$

le déterminant se réduirait à

$$\Sigma[\pm y'_1(x_1) y'_2(x_2) \ldots y'_r(x_r)]:$$

il serait conséquemment de l'ordre r.

(*) Monge, *Application de l'Analyse à la Géométrie,* 5e édit, Note I.

Si l'on déduit des équations

$$y_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = y_1, \quad y_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = y_2, \ldots,$$
$$y_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = y_n;$$

les valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et que l'on conçoive ces valeurs substituées dans les mêmes équations, on obtient par la différentiation

$$(96) \quad \begin{cases} y'_r(x_1)\, x'_1(y_r) + y'_r(x_2)\, x'_2(y_r) + \ldots + y'_r(x_n)\, x'_n(y_r) = 1, \\ y'_r(x_1)\, x'_1(y_s) + y'_r(x_2)\, x'_2(y_s) + \ldots + y'_r(x_n)\, x'_n(y_s) = 0, \end{cases}$$

et si, dans la valeur trouvée pour x_r, on met pour $y_1, y_2, \ldots, y_n$ leurs valeurs, on aura les équations

$$(97) \quad \begin{cases} y'_1(x_r)\, x'_r(y_1) + y'_2(x_r)\, x'_r(y_2) + \ldots + y'_n(x_r)\, x'_r(y_n) = 1, \\ y'_1(x_s)\, x'_r(y_1) + y'_2(x_s)\, x'_r(y_2) + \ldots + y'_n(x_s)\, x'_r(y_n) = 0. \end{cases}$$

D'après cela, si l'on représente par Q le déterminant

$$\Sigma[\pm x'_1(y_1)\, x'_2(y_2) \ldots x'_n(y_n)],$$

on aura par la règle de multiplication des déterminants

$$PQ = 1.$$

Si dans la seconde des équations (96) on fait

$$s = 1, 2, \ldots, n,$$

on obtient n équations desquelles on déduit

$$(98) \qquad Q y'_r(x_s) = \frac{dQ}{d.x'_s(y_r)},$$

et semblablement de (97) on déduit

$$(99) \qquad P x'_r(y_s) = \frac{dP}{d.y'_s(x_r)} = \alpha_{s,r},$$

par conséquent

$$x'_r(y_s)y'_r(x_s) = \frac{dP}{d.y'_s(x_r)} \cdot \frac{dQ}{d.x'_s(y_r)}.$$

En représentant par S le déterminant à éléments réciproques du déterminant P, et observant que pour $i = 0$, $r = s$, $r + c = n + 1$, l'équation (48) donne

$$S_{n+1,\, n+1} = P_{n,n} P^{r-2},$$

c'est-à-dire

$$\Sigma[\pm y'_r(x_r) y'_{r+1}(x_{r+1}) \ldots y'_n(x_n)] P^{r-2} = \Sigma(\pm \alpha_{1,1} \alpha_{2,2} \ldots \alpha_{r-1,\, r-1}).$$

On aura, d'après l'équation (99),

$$\Sigma[\pm y'_r(x_r) y'_{r+1}(x_{r+1}) \ldots y'_n(x_n)]$$
$$= P\Sigma[\pm x'_1(y_1) x'_2(y_2) \ldots x'_{r-1}(y_{r-1})],$$

et semblablement

$$\Sigma[\mp x'_r(y_r) x'_{r+1}(y_{r+1}) \ldots x'_n(y_n)]$$
$$= Q\Sigma[\pm y'_1(x_1) y'_2(x_2) \ldots y'_{r-1}(x_{r-1})].$$

En différentiant le déterminant Q par rapport à y_s, on a

$$\frac{dQ}{dy_s} = \Sigma_r \Sigma_m \frac{dQ}{d.x'_r(y_m)} \frac{d^2 x_r}{dy_m dy_s},$$

ou bien, d'après l'équation (98),

$$\frac{dQ}{dy_s} = Q \Sigma_r \Sigma_m \frac{d^2 x_r}{dy_m dy_s} y'_m(x_r),$$

ou encore

(100) $$\frac{dQ}{dy_s} = Q\Sigma_r \frac{d.x'_r(y_s)}{dx_r};$$

et comme $PQ = 1$, on aura

$$\frac{dP}{dy_s} + P\Sigma_r \frac{d.x'_r(y_s)}{dx_r} = 0.$$

Mais

$$\frac{dP}{dy_s} = \Sigma_r \frac{dP}{dx_r} x'_r(y_s);$$

donc, en substituant, on obtiendra

$$\Sigma_r \frac{d.Px'_r(y_s)}{dx_r} = 0,$$

ce qui, en vertu de (99), peut s'écrire

(101) $$\frac{d\alpha_{s,1}}{dx_1} + \frac{d\alpha_{s,2}}{dx_2} + \ldots + \frac{d\alpha_{s,n}}{dx_n} = 0.$$

Remarquons que, d'après cette dernière équation, l'expression de P, savoir

$$P = \alpha_{s,1} y'_s(x_1) + \alpha_{s,2} y'_s(x_2) + \ldots + \alpha_{s,n} y'_s(x_n)$$

pourra se mettre sous la forme

$$P = \frac{d.\alpha_{s,1} y_s}{dx_1} + \frac{d.\alpha_{s,2} y_s}{dx_2} + \ldots + \frac{d.\alpha_{s,n} y_s}{dx_n}.$$

Supposons qu'entre les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et les fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$, il existe les équations

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \ldots, \varphi_n = 0.$$

Si l'on déduit de ces équations les valeurs de $y_1, y_2, \ldots, y_n$, et qu'on les substitue dans ces mêmes équations, elles seront identiquement satisfaites, et l'on aura, en conséquence,

$$\frac{d\varphi_r}{dy_1} y'_1(x_r) + \frac{d\varphi_r}{dy_2} y'_2(x_r) + \ldots + \frac{d\varphi_r}{dy_n} y'_n(x_r) = -\frac{d\varphi_r}{dx_r}.$$

Il en résultera par la règle de multiplication

(102) $$P\Sigma\left(\pm \frac{d\varphi_1}{dy_1}\frac{d\varphi_2}{dy_2}\ldots\frac{d\varphi_n}{dy_n}\right) = (-1)^n \Sigma\left(\pm \frac{d\varphi_1}{dx_1}\frac{d\varphi_2}{dx_2}\ldots\frac{d\varphi_n}{dx_n}\right).$$

Application.

Soient A_1, A_2, ..., A_n, n fonctions des variables x_1, x_2, ..., x_n, et considérons l'équation aux différences partielles linéaires et du premier ordre

$$(103) \qquad A_1 y'_r(x_1) + A_2 y'_r(x_2) + \ldots + A_n y'_r(x_n) = 0.$$

Supposons que y_1, $y_2, \ldots, y_{r-1}, y_{r+1}, \ldots, y_n$ représentent $n-1$ solutions indépendantes entre elles de cette même équation; on aura par la substitution $n-1$ équations identiques, d'où l'on déduira les proportions

$$A_1 : A_2 : \ldots : A_n = \alpha_{r,1} : \alpha_{r,2} : \ldots : \alpha_{r,n}.$$

En nommant M la valeur commune à tous ces rapports, on aura évidemment

$$P = M[A_1 y'_r(x_1) + A_2 y'_r(x_2) + \ldots + A_n y'_r(x_n),$$

et d'après l'équation (101) on aura

$$(104) \qquad \frac{dMA_1}{dx_1} + \frac{dMA_2}{dx_2} + \ldots + \frac{dMA_n}{dx_n} = 0.$$

La quantité M qui jouit des deux propriétés exprimées par les deux dernières équations a été nommée par Jacobi (*) le *multiplicateur* de l'équation aux différences partielles (103) ou du système aux différentielles ordinaires

$$(105) \qquad x'_1 : x'_2 : \ldots : x'_n = A_1 : A_2 : \ldots : A_n.$$

Supposons maintenant que

$$(105) \quad \left\{ \begin{array}{l} B_1 = A_1 y'_1(x_1) + A_2 y'_1(x_2) + \ldots + A_n y'_1(x_n), \\ B_2 = A_1 y'_2(x_1) + A_2 y'_2(x_2) + \ldots + A_n y'_2(x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ B_n = A_1 y'_n(x_1) + A_2 y'_n(x_2) + \ldots + A_n y'_n(x_n). \end{array} \right.$$

(*) *Mathematische Werke*. Band I.

où $B_1, B_2, \ldots, B_n$ sont des fonctions de $y_1, y_2, \ldots, y_n$. En différentiant ces équations respectivement par rapport à y_1, $y_2, \ldots, y_n$, ajoutant les résultats et se rappelant que

$$\Sigma_r \frac{d.y'_r(x_s)}{dy_r} = \frac{1}{P}\frac{dP}{dx_s},$$

il vient

$$\Sigma_r \frac{dB_r}{dy_r} = \frac{1}{P}\left(A_1 \frac{dP}{dx_1} + A_2 \frac{dP}{dx_2} + \ldots + A_n \frac{dP}{dx_n}\right)$$
$$+ \frac{dA_1}{dx_1} + \frac{dA_2}{dx_2} + \ldots + \frac{dA_n}{dx_n},$$

et comme $PQ = 1$, il en résulte

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dx_r} = -\frac{1}{Q}\frac{dQ}{dx_r}.$$

On aura encore

$$Q\Sigma_r \frac{dB_r}{dy_r} = -\left(A_1 \frac{dQ}{dx_1} + A_2 \frac{dQ}{dx_2} + \ldots + A_n \frac{dQ}{dx_n}\right)$$
$$+ Q\left(\frac{dA_1}{dx_1} + \frac{dA_2}{dx_2} + \ldots + \frac{dA_n}{dx_n}\right).$$

Or, par (106), on a, quel que soit M,

$$B_1 \frac{d.MQ}{dy_1} + B_2 \frac{d.MQ}{dy_2} + \ldots + B_n \frac{d.MQ}{dy_n}$$
$$= A_1 \frac{d.MQ}{dx_1} + A_2 \frac{d.MQ}{dx_2} + \ldots + A_n \frac{d.MQ}{dx_n};$$

par conséquent, en ajoutant à cette dernière équation la précédente multipliée par M, il viendra

$$(107)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d.MQB_1}{dy_1} + \frac{d.MQB_2}{dy_2} + \ldots + \frac{d.MQB_n}{dy_n} \\ &= Q\left(\frac{d.MA_1}{dx_1} + \frac{d.MA_2}{dx_2} + \ldots + \frac{d.MA_n}{dx_n}\right). \end{aligned} \right.$$

Observons que, à cause de

$$y'_r = y'_r(x_1)\, x'_1 + y'_r(x_2)\, x'_2 + \ldots + y'_r(x_n)\, x'_n,$$

on déduit du système (105) le système équivalent

$$y'_1 : y'_2 : \ldots : y'_n = B_1 : B_2 : \ldots : B_n.$$

Si

$$y_1 = a_1, \quad y_2 = a_2, \ldots, \quad y_{n-2} = a_{n-2}$$

sont $(n-2)$ intégrales du système (105), les quantités B_1, $B_2, \ldots, B_{n-2}$ seront identiquement nulles et l'équation (107) deviendra

$$\frac{d.MQB_{n-1}}{dy_{n-1}} + \frac{d.MQB_n}{dy_n} = Q\left(\frac{d.MA_1}{dx_1} + \frac{d.MA_2}{dx_2} + \ldots + \frac{d.MA_n}{dx_n}\right).$$

Supposons que le multiplicateur M soit déterminé de manière à ce que

(108) $$\frac{d.MA_1}{dx_1} + \frac{d.MA_2}{dx_2} + \ldots + \frac{d.MA_n}{dx_n} = 0,$$

on aura, pour cette valeur de M,

$$\frac{d.MQB_{n-1}}{dy_{n-1}} + \frac{d.MQB_n}{dy_n} = 0,$$

c'est-à-dire MQ sera, comme on sait, le facteur propre à rendre intégrable l'équation

$$B_n y'_{n-1} - B_{n-1} y'_n = 0,$$

et, par suite,

$$\int MQ(B_n y'_{n-1} - B_{n-1} y'_n) = \text{const.}$$

sera la dernière intégrale des équations (105).

Il résulte de là que, étant données $n-2$ intégrales des $n-1$ équations (105), et connaissant une valeur de M qui

vérifie l'équation (108), la dernière intégrale desdites équations dépend simplement d'une quadrature. Cette propriété, découverte par Jacobi, a été nommée par le même auteur *principe du dernier multiplicateur.*

Voyons maintenant comment on pourra déterminer la valeur de M dans le cas du système des équations de la dynamique.

En représentant par T la demi-somme des forces vives, par U la fonction des forces, ces équations peuvent, comme on sait, se mettre sous la forme

$$\frac{dq_r}{dt}=\frac{d.(\mathrm{T}-\mathrm{U})}{dp_r},\quad \frac{dp_r}{dt}=-\frac{d.(\mathrm{T}-\mathrm{U})}{dq_r};$$

où il faut faire

$$r=1,\ 2,\ldots,\ n.$$

En posant

$$\frac{d.(\mathrm{T}-\mathrm{U})}{dp_r}=\mathrm{P}_r,\quad \frac{d.(\mathrm{T}-\mathrm{U})}{dq_r}=\mathrm{Q}_r,$$

ces équations reviennent à

$$t':q'_1:q'_2:\ldots:q'_n:p'_1:p'_2:\ldots:p'_n$$
$$=1:\mathrm{P}_1:\mathrm{P}_2:\ldots:\mathrm{P}_n:\mathrm{Q}_1:\mathrm{Q}_2:\ldots:\mathrm{Q}_n.$$

Par conséquent l'équation analogue à (108), au moyen de laquelle se trouve déterminé le multiplicateur M correspondant à ce système d'équations, sera

$$\frac{d\mathrm{M}}{dt}+\frac{d.\mathrm{MP}_1}{dq_1}+\ldots+\frac{d.\mathrm{MP}_n}{dq_n}+\frac{d.\mathrm{MQ}_1}{dp_1}$$
$$+\frac{d.\mathrm{MQ}_2}{dp_2}+\ldots+\frac{d.\mathrm{MQ}_n}{dp_n}=0,$$

équation qui, à cause de la relation évidente

$$\frac{d\mathrm{P}_r}{dq_r}+\frac{d\mathrm{Q}_r}{dp_r}=0,$$

se transforme dans la suivante :

$$\frac{dM}{dt} + P_1 \frac{dM}{dq_1} + \ldots + P_n \frac{dM}{dp_n} + Q_1 \frac{dM}{dp_1} + \ldots + Q_n \frac{dM}{dp_n} = 0.$$

Cette équation étant satisfaite quand on suppose M constante, ou, pour plus de simplicité, M égal à 1, il en résulte que le multiplicateur correspondant aux équations de la dynamique, mises sous la forme ci-dessus, est égal à l'unité.

En multipliant les équations

$$\begin{array}{l} y'_1(x_1)u_1 + y'_1(x_2)u_2 + \ldots + y'_1(x_n)u_n = v_1, \\ y'_2(x_1)u_1 + y'_2(x_2)u_2 + \ldots + y'_2(x_n)u_n = v_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y'_n(x_1)u_1 + y'_n(x_2)u_2 + \ldots + y'_n(x_n)u_n = v_n, \end{array}$$

respectivement par

$$x'_r(y_1), \quad x'_r(y_2), \ldots, \quad x'_r(y_n),$$

on obtiendra, d'après (97),

$$u_r = v_1 x'_r(y_1) + v_2 x'_r(y_2) + \ldots + v_n x'_r(y_n);$$

et pareillement, en multipliant les équations

$$\begin{array}{l} y'_1(x_1)u_1 + y'_2(x_1)u_2 + \ldots + y'_n(x_1)u_n = v_1, \\ y'_1(x_2)u_1 + y'_2(x_2)u_2 + \ldots + y'_n(x_2)u_n = v_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y'_1(x_n)u_1 + y'_2(x_n)u_2 + \ldots + y'_n(x_n)u_n = v_n \end{array}$$

par $x'_1(y_r)$, $x'_2(y_r)$, ..., $x'_n(y_r)$, on aura, d'après (96),

$$u_r = v_1 x'_1(y_r) + v_2 x'_2(y_r) + \ldots + v_n x'_n(y_r).$$

Posons

$$(109)\quad \left\{\begin{aligned} &y'_r(x_1)\,y'_s(x_1)+y'_r(x_2)\,y'_s(x_2)+\ldots\\ &+\;y'_r(x_n)\,y'_s(x_n)=\mathrm{A}_{r,s}=\mathrm{A}_{s,r},\\ &x'_1(y_r)\,x'_1(y_s)+x'_2(y_r)\,x'_2(y_s)+\ldots\\ &+\;x'_n(y_r)\,x'_n(y_s)=\mathrm{E}_{r,s}=\mathrm{E}_{s,r}.\end{aligned}\right.$$

En faisant dans cette dernière équation $s=1,\ 2,\ 3,\ldots,n$, on obtiendra n équations, d'où l'on déduira, d'après ce qui a été démontré plus haut,

$$\begin{aligned} x'_1(y_r)&=\mathrm{E}_{r,1}\,y'_1(x_1)+\mathrm{E}_{r,2}\,y'_2(x_1)+\ldots+\mathrm{E}_{r,n}\,y'_n(x_1),\\ x'_2(y_r)&=\mathrm{E}_{r,1}\,y'_1(x_2)+\mathrm{E}_{r,2}\,y'_2(x_2)+\ldots+\mathrm{E}_{r,n}\,y'_n(x_2),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x'_n(y_r)&=\mathrm{E}_{r,1}\,y'_1(x_n)+\mathrm{E}_{r,2}\,y'_2(x_n)+\ldots+\mathrm{E}_{r,n}\,y'_n(x_n).\end{aligned}$$

Multipliant ces équations respectivement par $y'_r(x_1)$, $y'_r(x_2),\ldots,y'_r(x_n)$, ou par $y'_s(x_1),\ y'_s(x_2),\ldots,y'_s(x_n)$, et ayant égard à (96), (109), on obtiendra les deux suivantes :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_{r,1}\,\mathrm{A}_{r,1}+\mathrm{E}_{r,2}\,\mathrm{A}_{r,2}+\ldots+\mathrm{E}_{r,n}\,\mathrm{A}_{r,n}&=1,\\ \mathrm{E}_{r,1}\,\mathrm{A}_{s,1}+\mathrm{E}_{r,2}\,\mathrm{A}_{s,2}+\ldots+\mathrm{E}_{r,n}\,\mathrm{A}_{s,n}&=0,\end{aligned}$$

d'où, en posant

$$\mathrm{P}^2=\mathrm{K}=\left|\begin{matrix}\mathrm{A}_{1,1} & \mathrm{A}_{1,2}\ldots & \mathrm{A}_{1,n}\\ \mathrm{A}_{2,1} & \mathrm{A}_{2,2}\ldots & \mathrm{A}_{2,n}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \mathrm{A}_{n,1} & \mathrm{A}_{n,2}\ldots & \mathrm{A}_{n,n}\end{matrix}\right|$$

$$\mathrm{Q}^2=\mathrm{H}=\left|\begin{matrix}\mathrm{E}_{1,1} & \mathrm{E}_{1,2}\ldots & \mathrm{E}_{1,n}\\ \mathrm{E}_{2,1} & \mathrm{E}_{2,2}\ldots & \mathrm{E}_{2,n}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \mathrm{E}_{n,1} & \mathrm{E}_{n,2}\ldots & \mathrm{E}_{n,n}\end{matrix}\right|$$

on déduit

$$(110)\qquad KH = 1,\quad A_{r,s} = \frac{1}{H}\frac{dH}{dE_{r,s}},\quad E_{r,s} = \frac{1}{K}\frac{dK}{dA_{r,s}}.$$

Application.

Soit F une fonction des fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ indépendantes entre elles, et soit posé, pour abréger,

$$F'(x_r) = X_r,\quad F'(y_r) = Y_r;$$

on aura évidemment

$$X_1 = Y_1 y'_1(x_1) + Y_2 y'_2(x_1) + \ldots + Y_n y'_n(x_1),$$
$$X_2 = Y_1 y'_1(x_2) + Y_2 y'_2(x_2) + \ldots + Y_n y'_n(x_2),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$X_n = Y_1 y'_1(x_n) + Y_2 y'_2(x_n) + \ldots + Y_n y'_n(x_n).$$

En multipliant ces équations respectivement par $y'_r(x_1)$, $y'_r(x_2), \ldots, y'_r(x_n)$, et ajoutant les résultats, on obtient

$$(111)\qquad X_1 y'_r(x_1) + X_2 y'_r(x_2) + \ldots + X_n y'_r(x_n) = L_r,$$

où, à cause des équations (109),

$$L_r = Y_1 A_{r,1} + Y_2 A_{r,2} + \ldots + Y_n A_{r,n},$$

ce qu'on peut encore écrire, en vertu de (110),

$$(112)\qquad HL_r = Y_1 \frac{dH}{dE_{r,1}} + Y_2 \frac{dH}{dE_{r,2}} + \ldots + Y_n \frac{dH}{dE_{r,n}}.$$

Si dans l'équation (111), on fait $r = 1, 2, \ldots, n$, on obtient n équations d'où l'on tire

$$(113)\qquad \begin{cases} X_1 = L_1 x'_1(y_1) + L_2 x'_1(y_2) + \ldots + L_n x'_1(y_n), \\ X_2 = L_1 x'_2(y_1) + L_2 x'_2(y_2) + \ldots + L_n x'_2(y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_n = L_1 x'_n(y_1) + L_2 x'_n(y_2) + \ldots + L_n x'_n(y_n), \end{cases}$$

et l'on déduit aisément de l'équation (112)

$$L_1 E_{r,1} + L_2 E_{r,2} + \ldots + L_n E_{r,n} = Y_r.$$

En différentiant les équations (113) par rapport à x_1, $x_2, \ldots, x_n$ respectivement et faisant la somme des résultats, on obtient

$$\Sigma_r \frac{dX_r}{dx_r} = \frac{dL_1}{dy_1} + \frac{dL_2}{dy_2} + \ldots + \frac{dL_n}{dy_n} + L_1 \Sigma_r \frac{d.x'_r(y_1)}{dx_r}$$
$$+ L_2 \Sigma_r \frac{d.x'_r(y_2)}{dx_r} + \ldots + L_n \Sigma_r \frac{d.x'_r(y_n)}{dx_r},$$

ou bien, en vertu de (100),

$$(114) \quad \left\{ \begin{aligned} & Q\left(\frac{dX_1}{dx_1} + \frac{dX_2}{dx_2} + \ldots + \frac{dX_n}{dx_n}\right) \\ & = \frac{d.L_1 Q}{dy_1} + \frac{d.L_2 Q}{dy_2} + \ldots + \frac{d.L_n Q}{dy_n}, \end{aligned} \right.$$

équation que l'on peut encore, à cause de $PQ = 1$, écrire sous la forme

$$P \Sigma_r \frac{dX_r}{dx_r} = P\left(\frac{dL_1}{dy_1} + \frac{dL_2}{dy_2} + \ldots + \frac{dL_n}{dy_n}\right)$$
$$- \left(L_1 \frac{dP}{dy_1} + L_2 \frac{dP}{dy_2} + \ldots + L_n \frac{dP}{dy_n}\right),$$

et comme, en multipliant les équations (113) par $\frac{dP}{dx_1}$, $\frac{dP}{dx_2}, \ldots, \frac{dP}{dx_n}$, et ajoutant les résultats, on a

$$X_1 \frac{dP}{dx_1} + X_2 \frac{dP}{dx_2} + \ldots + X_n \frac{dP}{dx_n} = L_1 \frac{dP}{dy_1} + L_2 \frac{dP}{dy_2} + \ldots + L_n \frac{dP}{dy_n},$$

il vient, en substituant,

$$P\left(\frac{dL_1}{dy_1} + \frac{dL_2}{dy_2} + \ldots + \frac{dL_n}{dy_n}\right)$$
$$= \frac{d.X_1 P}{dx_1} + \frac{d.X_2 P}{dx_2} + \ldots + \frac{d.X_n P}{dx_n}.$$

Au moyen de l'équation (114), on obtient une transformation générale de l'équation aux différences partielles du second ordre à $n+1$ variables,

$$\frac{d^2 F}{dx_1^2} + \frac{d^2 F}{dx_2^2} + \ldots + \frac{d^2 F}{dx_n^2} = 0,$$

laquelle transformation dans le cas de $n=3$ correspond à celle qu'a trouvée Jacobi au moyen du calcul des variations (*) et comprend par suite comme cas particuliers celle que l'on doit à Laplace, à M. Lamé et à M. Cauchy (**). Si l'on suppose $E_{r,s}=0$, on a

$$Q = \sqrt{(E_{1,1} E_{2,2} \ldots E_{n,n}}, \quad HL_r = Y_r \frac{dH}{dE_{r,r}},$$

et, par suite,

$$L_r Q = \frac{\sqrt{(E_{1,1} E_{2,2} \ldots E_{r-1,r-1} E_{r+1,r+1} \ldots E_{n,n}}}{\sqrt{E_{r,r}}} \frac{dF}{dy_r}.$$

Soient

$$x_1 = y_1 \cos y_2,$$

$$x_2 = y_1 \sin y_2 \cos y_3, \quad x_3 = y_1 \sin y_2 \sin y_3 \cos y_4, \ldots,$$

$$x_{n-1} = y_1 \sin y_2 \sin y_3 \ldots \sin y_{n-1} \cos y_n,$$

$$x_n = y_1 \sin y_2 \sin y_3 \ldots \sin y_n;$$

on trouve aisément

$$E_{r,s} = 0$$

et

$$E_{1,1} = 1, \quad E_{2,2} = y_1^2, \quad E_{3,3} = y_1^2 \sin^2 y_2, \quad E_{4,4} = y_1^2 \sin^2 y_2 \sin^2 y_3, \ldots,$$

$$E_{n,n} = y_1^2 \sin^2 y_2 \sin^2 y_3 \ldots \sin^2 y_{n-1},$$

(*) *Mathematische Werke*. Band. II.

(**) *Journal de l'École Polytechnique*, XXIII[e] Cahier. — *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, tome II.

et, par suite,

$$L_1 Q = y_1^{n-1} \sin^{n-2} y_2 \sin^{n-3} y_3 \ldots \sin y_{n-1} \frac{dF}{dy_1},$$

$$L_2 Q = y_1^{n-3} \sin^{n-2} y_2 \sin^{n-3} y_3 \ldots \sin y_{n-1} \frac{dF}{dy_2},$$

$$L_3 Q = y_1^{n-3} \sin^{n-4} y_2 \sin^{n-3} y_3 \ldots \sin y_{n-1} \frac{dF}{dy_3},$$

....

$$L_r Q = y_1^{n-3} \sin^{n-4} y_2 \sin^{n-5} y_3 \ldots \sin^{n-r-1} y_{r-1} \sin^{n-n} y_r \ldots \sin y_{n-1} \frac{dF}{dy_r}.$$

Pour le cas de $n = 3$, on obtient

$$\frac{d^2F}{dx_1^2} + \frac{d^2F}{dx_2^2} + \frac{d^2F}{dx_3^2} = \sin y_2 \frac{d . y_1^2 \frac{dF}{dy_1}}{dy_1}$$

$$+ \frac{d . \sin y_2 \frac{dF}{dy_2}}{dy_2} \frac{1}{\sin y_2} \frac{d^2F}{dy_3^2} = 0,$$

ce qui est précisément la transformation connue de Laplace.

De la seconde des équations (109), on déduit par la différentiation

$$(115) \left\{ \begin{array}{l} x'_1(y_s) \dfrac{d . x'_1(y_r)}{dy_m} + x'_2(y_s) \dfrac{d . x'_2(y_r)}{dy_m} + \ldots \\ + x'_n(y_s) \dfrac{d . x'_n(y_r)}{dy_m} = \dfrac{1}{2} \left(\dfrac{dE_{r,s}}{dy_m} + \dfrac{dE_{m,s}}{dy_r} - \dfrac{dE_{r,m}}{dy_s} \right), \end{array} \right.$$

et celle-ci où l'on fait

$$M_s = \frac{1}{2} \left(\frac{dE_{r,s}}{dy_m} + \frac{dE_{m,s}}{dy_r} - \frac{dE_{r,m}}{dy_s} \right),$$

fournit

$$(116)\begin{cases}\dfrac{d.x'_1(y_r)}{dy_m} = M_1 y'_1(x_1) + M_2 y'_2(x_1) + \ldots + M_n y'_n(x_1),\\ \dfrac{d.x'_2(y_r)}{dy_m} = M_1 y'_1(x_2) + M_2 y'_2(x_2) + \ldots + M_n y'_n(x_2),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \dfrac{d.x'_n(y_r)}{dy_m} = M_1 y'_1(x_n) + M_2 y'_2(x_n) + \ldots + M_n y'_n(x_n).\end{cases}$$

Considérons maintenant le déterminant

$$V = \begin{vmatrix} X_1 & X_{1,2} & X_{1,2} & \ldots & X_{1,n} \\ X_2 & X_{2,1} & X_{2,2} & \ldots & X_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ X_n & X_{n,1} & X_{n,2} & \ldots & X_{n,n} \\ 0 & X_1 & X_2 & \ldots & X_n \end{vmatrix}$$

dans lequel $X_{s,r} = X_{r,s} = \dfrac{dX_r}{dx_s}$, et observons qu'on peut l'obtenir en faisant le produit des deux déterminants

$$\begin{vmatrix} Y_1 & a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ Y_2 & a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ Y_n & a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} \\ 0 & X_1 & X_2 & \ldots & X_n \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} y'_1(x_1) & y'_1(x_2) & \ldots & y'_1(x_n) & 0 \\ y'_2(x_1) & y'_2(x_2) & \ldots & y'_2(x_n) & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y'_n(x_1) & y'_n(x_2) & \ldots & y'_n(x_n) & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

dans le premier desquels on a posé $a_{r,s} = \dfrac{dX_r}{dy_s}$. En multipliant le premier de ces déterminants par le déterminant

$$\begin{vmatrix} 0 & x'_1(y_1) & x'_2(y_1) & \ldots & x'_n(y_1) \\ 0 & x'_1(y_2) & x'_2(y_2) & \ldots & x'_n(y_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & x'_1(y_n) & x'_2(y_n) & \ldots & x'_n(y_n) \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix}$$

et posant

$$(117)\qquad a_{1,r}\,x'_1(y_s)+a_{2,r}\,x'_2(y_s)+\ldots+a_{n,r}\,x'_n(y_s)=h_{r,s},$$

on obtient

$$S=\begin{vmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} & \ldots & h_{1,n} & Y_1 \\ h_{2,1} & h_{2,2} & \ldots & h_{2,n} & Y_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ h_{n,1} & h_{n,2} & \ldots & h_{n,n} & Y_n \\ Y_1 & Y_2 & \ldots & Y_n & 0 \end{vmatrix}$$

et comme, d'après les opérations exécutées, on a évidemment $S = VQ^2$, il en résulte

$$V=\frac{S}{H}.$$

Remarquons qu'en différentiant l'équation

$$Y_s = X_1\,x'_1(y_s)+X_2\,x'_2(y_s)+\ldots+X_n\,x'_n(y_s)$$

par rapport à y_r, on a, d'après les équations (111), (116) et (117),

$$Y_{s,r}=Y_{r,s}=h_{r,s}+\frac{1}{2}\Sigma_m L_m\left(\frac{dE_{s,m}}{dy_r}+\frac{dE_{r,m}}{dy_s}-\frac{dE_{s,r}}{dy_m}\right),$$

d'où

$$h_{r,s}=Y_{r,s}-\frac{1}{2}\Sigma_m L_m\left(\frac{dE_{s,m}}{dy_r}+\frac{dE_{r,m}}{dy_s}-\frac{dE_{s,r}}{dy_m}\right),$$

et par conséquent le déterminant V se trouve uniquement exprimé par les fonctions Y_1, Y_2,..., $E_{r,s}$ et leurs dérivées.

Si dans l'expression

$$\frac{1}{2}\Sigma_m L_m\left(\frac{dE_{s,m}}{dy_r}+\frac{dE_{r,m}}{dy_s}-\frac{dE_{s,r}}{dy_m}\right)$$

on substitue pour L_m sa valeur (112), il vient

$$\frac{1}{H}\Sigma_i Y_i\,\Sigma_m\frac{1}{2}\left(\frac{dE_{s,m}}{dy_r}+\frac{dE_{r,m}}{dy_s}-\frac{dE_{s,r}}{dy_m}\right)\frac{dH}{dE_{m,i}},$$

et comme, d'après (109), (115), le déterminant

$$\Sigma_m \frac{1}{2}\left(\frac{d\,E_{s,m}}{dy_r}+\frac{d\,E_{r,m}}{dy_s}-\frac{d\,E_{s,r}}{dy_m}\right)\frac{d\,H}{d\,E_{m,i}}$$

résulte du produit

$$Q\times\begin{vmatrix} x'_1(y_1) & x'_1(y_2)\ldots & x'_1(y_{i-1}) & \dfrac{d.x'_1(y_s)}{dy_r} & x'_1(y_{i+1})\ldots & x'_1(y_n) \\ x'_2(y_1) & x'_2(y_2)\ldots & x'_2(y_{i-1}) & \dfrac{d.x'_2(y_s)}{dy_r} & x'_2(y_{i+1})\ldots & x'_2(y_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x'_n(y_1) & x'_n(y_2)\ldots & x'_n(y_{i-1}) & \dfrac{d.x'_n(y_s)}{dy_r} & x'_n(y_{i+i})\ldots & x'_n(y_n) \end{vmatrix}$$

en représentant ce dernier déterminant par ${}^{(i)}N_{s,r}$ on aura

$$h_{r,s}=Y_{r,s}-\frac{1}{Q}\,\Sigma_i Y_i\,{}^{(i)}N_{s,r}.$$

Dans le cas où $Y_1=Y_2=\ldots=Y_{n-1}=0$, $Y_n=1$, on a

$$S=\begin{vmatrix} h_{1,1} & h_{1,2}\ldots & h_{1,n-1} \\ h_{2,1} & h_{2,2}\ldots & h_{2,n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ h_{n-1,1} & h_{n-1,2}\ldots & h_{n-1,n-1} \end{vmatrix},\quad h_{r,s}=-\frac{1}{Q}\,{}^{(n)}N_{s,r},$$

et en posant ${}^{(n)}N_{s,r}=k_{s,r}=k_{r,s}$, il en résulte

$$V=\frac{1}{(-Q)^{n+1}}\begin{vmatrix} k_{1,1} & k_{1,2}\ldots & k_{1,n-1} \\ k_{2,1} & k_{2,2}\ldots & k_{2,n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ k_{n-1,1} & k_{n-1,2}\ldots & k_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

Pour $n=3$ cette expression reproduit la formule connue de Gauss pour la courbure d'une surface (*).

(*) *Nouveaux Mémoires de la Société royale des Sciences de Gottingue*, tome VI.

De l'équation (102), on déduit deux formules d'un grand usage dans la théorie des déterminants fonctionnels. Si de s quelconques des équations

$$
(118)\quad \left\{
\begin{array}{l}
y_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = y_1, \\
y_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = y_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = y_n,
\end{array}
\right.
$$

on tire les valeurs de x_{r+1}, $x_{r+2}, \ldots$, x_{r+s}, et qu'on les substitue dans les $(n-s)$ autres équations, on obtient

$$
(119)\quad \left\{
\begin{array}{l}
\varphi_1 = y_1 - y_1(x_1, \ldots, x_r, y_{r+1}, \ldots, y_{r+s}, x_{r+s+1}, \ldots, x_n) = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\varphi_r = y_r - y_r(x_1, \ldots, x_r, y_{r+1}, \ldots, y_{r+s}, x_{r+s+1}, \ldots, x_n) = 0, \\
\varphi_{r+1} = y_{r+1} - y_{r+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\varphi_{r+s} = y_{r+s} - y_{r+s}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\
\varphi_{r+s+1} = y_{r+s+1} - y_{r+s+1}(x_1, \ldots, x_r, y_{r+1} \ldots y_{r+1}, x_{r+s+1}, \ldots, x_n) = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\varphi_n = y_n - y_n(x_1, \ldots, x_r, y_{r+1}, \ldots, y_{r+s}, x_{r+s+1}, \ldots, x_n) = 0.
\end{array}
\right.
$$

D'après la forme des fonctions φ_1, $\varphi_2, \ldots$, il est évident que

$$
\Sigma\left(\pm \frac{d\varphi_1}{dy_1}\frac{d\varphi_2}{dy_2}\cdots\frac{d\varphi_n}{dy_n}\right) = \frac{d\varphi_1}{dy_1}\frac{d\varphi_2}{dy_2}\cdots\frac{d\varphi_n}{dy_n},
$$

et comme $\dfrac{d\varphi_r}{dy_r} = 1$, on aura

$$
\Sigma\left(\pm \frac{d\varphi_1}{dy_1}\frac{d\varphi_2}{dy_2}\cdots\frac{d\varphi_n}{dy_n}\right) = 1.
$$

D'un autre côté, si l'on observe que

$$\frac{d\varphi_1}{dx_{r+1}} = \frac{d\varphi_2}{dx_{r+1}} = \ldots = \frac{d\varphi_r}{dx_{r+1}} = \frac{d\varphi_{r+s+1}}{dx_{r+1}} = \ldots = \frac{d\varphi_n}{dx_{r+1}} = 0,$$

$$\frac{d\varphi_1}{dx_{r+2}} = \frac{d\varphi_2}{dx_{r+2}} = \ldots = \frac{d\varphi_r}{dx_{r+2}} = \frac{d\varphi_{r+s+1}}{dx_{r+2}} = \ldots = \frac{d\varphi_n}{dx_{r+2}} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{d\varphi_1}{dx_{r+s}} = \frac{d\varphi_2}{dx_{r+s}} = \ldots = \frac{d\varphi_r}{dx_{r+s}} = \frac{d\varphi_{r+s+1}}{dx_{r+s}} = \ldots = \frac{d\varphi_n}{dx_{r+s}} = 0,$$

on obtient

$$\Sigma\left(\pm\frac{d\varphi_1}{dx_1}\frac{d\varphi_2}{dx_2}\ldots\frac{d\varphi_n}{dx_n}\right)$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{d\varphi_1}{dx_1} & \ldots & \frac{d\varphi_1}{dx_r} & \frac{d\varphi}{dx_{r+s+1}} \ldots & \frac{d\varphi_1}{dx_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{d\varphi_r}{dx_1} & \ldots & \frac{d\varphi_r}{dx_r} & \frac{d\varphi_r}{dx_{r+s+1}} \ldots & \frac{d\varphi_r}{dx_n} \\ \frac{d\varphi_{r+s+1}}{dx_1} \ldots & & \frac{d\varphi_{r+s+1}}{dx_r} & \frac{d\varphi_{r+s+1}}{dx_{r+s+1}} \ldots & \frac{d\varphi_{r+s+1}}{dx_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{d\varphi_n}{dx_1} & \ldots & \frac{d\varphi_n}{dx_r} & \frac{d\varphi_n}{dx_{r+s+1}} \ldots & \frac{d\varphi_n}{dx_n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{d\varphi_{r+1}}{dx_{r+1}} & \frac{d\varphi_{r+1}}{dx_{r+2}} \ldots & \frac{d\varphi_{r+1}}{dx_{r+s}} \\ \frac{d\varphi_{r+2}}{dx_{r+1}} & \frac{d\varphi_{r+2}}{dx_{r+2}} \ldots & \frac{d\varphi_{r+2}}{dx_{r+s}} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{d\varphi_{r+s}}{dx_{r+1}} & \frac{d\varphi_{r+s}}{dx_{r+2}} \ldots & \frac{d\varphi_{r+s}}{dx_{r+s}} \end{vmatrix}$$

Maintenant, d'après les équations (119),

$$\frac{d\varphi_r}{dx_s} = -y'_r(x_s);$$

donc, en se rappelant l'équation (102), on aura la suivante:

$$\begin{aligned} P = \Sigma\left\{\pm[y'_1(x_1)]\ldots[y'_r(x_r)]\,[y'_{r+s+1}(x_{r+s+1})]\ldots[y'_n(x_n)]\right\} \\ \times\Sigma\left\{\pm y'_{r+1}(x_{r+1})\ldots y'_{r+s}(x_{r+s})\right\}, \end{aligned}$$

où l'on a mis entre parenthèses dans le premier déterminant du second membre les quantités $y'_1(x_1)$, $y'_2(x_2)$, ... pour faire voir que les $y_1, y_2, \ldots, y_r, y_{r+s+1}, \ldots, y_n$ sont

considérés comme des fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_r\ y_{r+1}, \ldots, y_{r+s}, x_{r+s+1}, \ldots, x_n$. Par un procédé analogue, on obtiendra

$$(120) \left\{ \begin{aligned} P = \Sigma & \left\{ \pm [y'_{r+1}(x_{r+1})] [y'_{r+2}(x_{r+2})] \ldots [y'_{r+s}(x_{r+s})] \right\} \\ & \times \Sigma \left\{ \pm y'_1(x_1) \ldots y'_r(x_r)\ y'_{r+s+1}(x_{r+s+1}) \ldots y'_n(x) \right\}. \end{aligned} \right.$$

Si dans cette dernière équation, on fait $s = 1$, il vient

$$(121) \qquad P = [y'_{r+1}(x_{r+1})] . \alpha_{r+1,r+1}.$$

Supposons actuellement que de la première des équations (118), on tire la valeur de x_1 en fonction de $x_2, x_3, \ldots, x_n$, et qu'on la substitue dans les autres ; de la seconde, la valeur de x_2 en fonction de $x_3, x_4, \ldots, x_n$, et qu'on la porte dans les suivantes, et ainsi de suite. Ces équations prendront la forme

$$(122) \left\{ \begin{array}{l} \varphi_1 = y_1 - y_1(x_1, x_2, \ldots, \qquad x_n) = 0, \\ \varphi_2 = y_2 - y_2(y_1, x_2, \ldots, \qquad x_n) = 0, \\ \varphi_3 = y_3 - y_3(y_1, y_2, \ldots, \qquad x_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_n = y_n - y_n(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, x_n) = 0, \end{array} \right.$$

et comme on a évidemment

$$(123) \left\{ \begin{array}{l} \Sigma \left(\pm \dfrac{d\varphi_1}{dy_1} \dfrac{d\varphi_2}{dy_2} \ldots \dfrac{d\varphi_n}{dy_n} \right) = 1, \quad \dfrac{d\varphi_r}{dx_r} = -[y'_r(x_r)], \\ \Sigma \left(\pm \dfrac{d\varphi_1}{dx_1} \dfrac{d\varphi_2}{dx_2} \ldots \dfrac{d\varphi_n}{dx_n} \right) = \dfrac{d\varphi_1}{dx_1} \dfrac{d\varphi_2}{dx_2} \ldots \dfrac{d\varphi_n}{dx_n}, \end{array} \right.$$

on aura encore, d'après l'équation (102),

$$(124) \qquad P = [y'_1(x_1)] [y'_2(x_2)] \ldots [y'_n(x_n)],$$

les parenthèses sont destinées toujours à mettre en évidence la composition des $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Application.

Désignons par $A_{r,s}$ le déterminant

$$\Sigma[\pm y'_1(x_1)\, y'_2(x_2)\ldots y'_m(x_m)\, y'_{m+r}(x_{m+s})].$$

Si dans la fonction y_{m+r}, on introduit les $y_1, y_2, \ldots y_m$ à la place des $x_1, x_2, \ldots, x_m$, on a par la formule (121)

$$A_{r,s} = [y'_{m+r}(x_{m+s})] \cdot \Sigma[\pm y'_1(x_1)\, y'_2(x_2)\ldots y'_m(x_m)],$$

et, par conséquent,

$$\Sigma(\pm A_{1,1}\, A_{2,2}\ldots A_{n-m,n-m}) = \left\{\Sigma[\pm y'_1(x_1)\ldots y'_m(x_m)]\right\}^{n-m}$$
$$\times\, \Sigma[\pm(y'_{m+1}(x_{m+1})]\ldots[y'_n(x_n)],$$

et en ayant égard à (120)

$$\Sigma(\pm A_{1,1}\, A_{2,2}\ldots A_{n-m,n-m}) = P$$
$$\times \left\{\Sigma[\pm y'_1(x_1)\, y'_2(x_2)\ldots y'_m(x_m)]\right\}^{n-m-1}.$$

Supposons

$$y_r = a_{r,1}\, x_1 + a_{r,2}\, x_2 + \ldots + a_{r,n}\, x_n,$$

on a dans ce cas

$$A_{r,s} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,m} & a_{1,m+s} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,m} & a_{2,m+s} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \ldots & a_{m,m} & a_{m,m+s} \\ a_{m+r,1} & a_{m+r,2} & \ldots & a_{m+r,m} & a_{m+r,m+s} \end{vmatrix}$$

et, par suite,

$$\Sigma(\pm A_{1,1}\, A_{2,2}\ldots A_{n-m,n-m})$$

$$= \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \ldots & a_{m,m} \end{vmatrix}^{n-m-1} \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

La propriété qu'exprime cette formule est due à M. Sylvester (*). Si dans cette même formule, on fait $m = n - 2$, on obtient une équation qui est un cas particulier de l'équation (14) du § III.

Si les fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ne sont pas indépendantes entre elles, mais sont liées par exemple par une équation

$$\varphi_1(y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0,$$

il est visible que le déterminant P sera égal à zéro. Cela résulte immédiatement de ce que l'on a dans ce cas n équations analogues à

$$\frac{d\varphi}{dy_1} y'_1(x_r) + \frac{d\varphi}{dy_2} y'_2(x_r) + \ldots + \frac{d\varphi}{dy_n} y'_n(x_r) = 0.$$

Au moyen de l'équation (121), on peut démontrer la proposition inverse, à savoir que si le déterminant P est égal à zéro, les fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ne sont pas indépendantes entre elles. Nous supposerons que la propriété a lieu pour le déterminant du $(n-1)^{ième}$ ordre $\alpha_{r,r}$, et nous prouverons que dans cette hypothèse elle a nécessairement lieu pour le déterminant du $n^{ième}$ ordre P; de façon que, lorsque cette propriété sera démontrée pour le déterminant du second ordre, elle le sera par là même pour le cas général. Observons que si $P = 0$, on devra avoir d'après (121) ou $[y'_r(x_r)] = 0$, ou $\alpha_{r,r} = 0$. Dans le second cas, d'après l'hypothèse admise les $y_1, y_2, \ldots, y_{r-1}, y_{r+1}, \ldots, y_n$ ne seraient pas indépendants entre eux, ce qui ne peut avoir lieu si l'on se reporte à la manière dont a été trouvée la même équation (121); donc il faudra que l'on ait

$$[y'_r(x_r)] = 0,$$

(*) *Philosophical Magazine*, 1851.

c'est-à-dire que y_r sera exprimable au moyen des fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_{r-1}, y_{r+1}, \ldots, y_n$, et conséquemment les fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ne seront pas indépendantes entre elles.

Actuellement le déterminant du second ordre

$$y'_1(x_1)\, y'_2(x_2) - y'_1(x_2)\, y'_2(x_1),$$

est égal, d'après (121), à

$$[y'_1(x_1)]\, y'_2(x_2),$$

et comme la fonction y_2 contiendra en général la variable x_2, si le déterminant est nul, il faudra que $[y'_1(x_1)]$ le soit aussi, et, par conséquent, les fonctions y_1, y_2 ne seront pas indépendantes entre elles.

La formule (102) donne la valeur du déterminant P, lorsque entre les n variables x et les n fonctions y, il existe n équations $\varphi = 0$. Supposons présentement que les fonctions y et les équations $\varphi = 0$ soient en nombre plus grand que les variables x, et cherchons à déterminer la valeur du déterminant P. Soient

$$\varphi_1 = 0,\ \varphi_2 = 0, \ldots, \varphi_{n+r} = 0,$$

$n + r$ équations qui ont lieu entre les n variables x et les fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_{n+r}$ de ces variables. En tirant des équations $\varphi_{n+1} = 0, \varphi_{n+2} = 0, \ldots, \varphi_{n+r} = 0$, les valeurs de $y_{n+1}, y_{n+2}, \ldots, y_{n+r}$ et les substituant dans les n premières équations, on a

$$\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0,$$
$$\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0.$$

Ces n équations donnent, d'après la formule (102),

$$(125)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{P}\,\Sigma\left[\pm\left(\frac{d\varphi_1}{dy_1}\right)\left(\frac{d\varphi_2}{dy_2}\right)\left(\frac{d\varphi_n}{dy_n}\right)\right] \\ &=(-1)^n\,\Sigma\left[\pm\left(\frac{d\varphi_1}{dx_1}\right)\left(\frac{d\varphi_2}{dx_2}\right)\cdots\left(\frac{d\varphi_n}{dx_n}\right)\right],\end{aligned}\right.$$

où les dérivées sont mises entre parenthèses pour rappeler la composition des $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$. Remarquons maintenant que

$$\Sigma\left[\pm\left(\frac{d\varphi_1}{dx_1}\right)\left(\frac{d\varphi_2}{dx_2}\right)\cdots\left(\frac{d\varphi_n}{dx_n}\right)\right]=\Sigma\left(\pm\frac{d\varphi_1}{dx_1}\,\frac{d\varphi_2}{dx_2}\cdots\frac{d\varphi_n}{dx_n}\right),$$

et que

$$\begin{aligned}&\Sigma\left(\pm\frac{d\varphi_1}{dx_1}\,\frac{d\varphi_2}{dx_2}\cdots\frac{d\varphi_n}{dx_n}\right)\cdot\Sigma\left(\pm\frac{d\varphi_{n+1}}{dy_{n+1}}\,\frac{d\varphi_{n+2}}{dy_{n+2}}\cdots\frac{d\varphi_{n+r}}{dy_{n+r}}\right)\\ &=\Sigma\left(\pm\frac{d\varphi_1}{dx_1}\cdots\frac{d\varphi_n}{dx_n}\,\frac{d\varphi_{n+1}}{dy_{n+1}}\cdots\frac{d\varphi_{n+r}}{dy_{n+r}}\right),\end{aligned}$$

en observant que

$$\left(\frac{d\varphi_1}{dy_{n+1}}\right)=\left(\frac{d\varphi_2}{dy_{n+1}}\right)=\cdots=\left(\frac{d\varphi_1}{dy_{n+2}}\right)=\cdots=\left(\frac{d\varphi_n}{dy_{n+r}}\right)=0.$$

D'ailleurs on a évidemment

$$\begin{aligned}\Sigma\left(\pm\frac{d\varphi_1}{dy_1}\,\frac{d\varphi_2}{dy_2}\cdots\frac{d\varphi_{n+r}}{dy_{n+r}}\right)&=\Sigma\left[\pm\left(\frac{d\varphi_1}{dy_1}\right)\left(\frac{d\varphi_2}{dy_2}\right)\cdots\left(\frac{d\varphi_n}{dy_n}\right)\right]\\ &\times\Sigma\left(\pm\frac{d\varphi_{n+1}}{dy_{n+1}}\,\frac{d\varphi_{n+2}}{dy_{n+2}}\cdots\frac{d\varphi_{n+r}}{dy_{n+r}}\right);\end{aligned}$$

donc l'équation (125) deviendra

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}\,\Sigma\left(\pm\frac{d\varphi_1}{dy_1}\,\frac{d\varphi_2}{dy_2}\cdots\frac{d\varphi_{n+r}}{dy_{n+r}}\right)\\ &=\Sigma\left(\pm\frac{d\varphi_1}{dx_1}\,\frac{d\varphi_2}{dx_2}\cdots\frac{d\varphi_n}{dx_n}\,\frac{d\varphi_{n+1}}{dy_{n+1}}\cdots\frac{d\varphi_{n+r}}{dy_{n+r}}\right),\end{aligned}$$

ce qui fait connaître la valeur de P.

Si les quantités $y_1, y_2, \ldots, y_n$ étaient des fonctions composées des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, c'est-à-dire si elles étaient des fonctions d'autres fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, l'équation (102) donnerait évidemment

$$P = \Sigma\left(\pm\frac{dy_1}{d\varphi_1}\,\frac{dy_2}{d\varphi_2}\cdots\frac{dy_n}{d\varphi_n}\right)\cdot\Sigma\left(\pm\frac{d\varphi_1}{dx_1}\,\frac{d\varphi_2}{dx_2}\cdots\frac{d\varphi_n}{dx_n}\right),$$

et si les fonctions composantes φ étaient en nombre plus grand que $y_1, y_2, \ldots, y_n$, par exemple si elles étaient en nombre $m > n$, on aurait, d'après l'équation (61) du § VII,

$$P = \Sigma\left[\Sigma\left(\pm\frac{dy_1}{d\varphi_{r_1}}\,\frac{dy_2}{d\varphi_{r_2}}\cdots\frac{dy_n}{d\varphi_{r_n}}\right)\cdot\Sigma\left(\pm\frac{d\varphi_{r_1}}{dx_1}\,\frac{d\varphi_{r_2}}{dx_2}\cdots\frac{d\varphi_{r_n}}{dx_n}\right)\right],$$

équation dans laquelle la première caractéristique Σ se rapporte à la somme de tous les produits analogues à celui entre crochets, et que l'on obtient en mettant à la place des indices $r_1, r_2, \ldots. r_n$, n quelconques des nombres $1, 2, 3, \ldots, m$.

Supposons qu'entre les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, l'on donne n équations

$$y_1 = \alpha_1,\ y_2 = \alpha_2, \ldots,\ y_n = \alpha_n,$$

où les α sont des constantes, et que par des transformations faciles à apercevoir, on réduise ces mêmes équations à la forme

$$\begin{array}{l}
\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \alpha_1,\\
\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \alpha_2,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \alpha_n.
\end{array}$$

Les $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ pourront être considérés comme des fonc-

tions implicites, et par la formule (102) on aura

$$P\,\Sigma\left[\pm\left(\frac{d\varphi_1}{d\alpha_1}-1\right)\left(\frac{d\varphi_2}{d\alpha_2}-1\right)\cdots\left(\frac{d\varphi_n}{d\alpha_n}-1\right)\right]$$
$$=(-1)^n\,\Sigma\left(\pm\frac{d\varphi_1}{dx_1}\,\frac{d\varphi_2}{dx_2}\cdots\frac{d\varphi_n}{dx_n}\right).$$

Par conséquent le déterminant fonctionnel P ne changera pas de valeur dans cette transformation toutes les fois que l'on aura

$$\Sigma\left[\pm\left(\frac{d\varphi_1}{d\alpha_1}-1\right)\left(\frac{d\varphi_2}{d\alpha_2}-1\right)\cdots\left(\frac{d\varphi_n}{d\alpha_n}-1\right)\right]=1,$$

comme ce serait le cas, par exemple, si φ_1 était indépendant de α_1, φ_2 de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, φ_n de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Application.

On déduit de l'équation (124) la formule générale pour la transformation des intégrales multiples. Considérons l'intégrale multiple du $n^{ième}$ ordre

$$\int^n U\,dy_1\,dy_2\ldots dy_n,$$

et supposons les $y_1, y_2, \ldots, y_n$ liés à n autres variables x_1, $x_2, \ldots, x_n$ par les équations (122). En généralisant la règle ordinaire pour la transformation des intégrales simples [comme cela se pratique habituellement dans la recherche des formules pour la transformation des intégrales doubles et des intégrales triples (*)], on obtient

$$\int^n U\,dy_1\,dy_2\ldots dy_n=\int^n U\,\frac{d\varphi_1}{dx_1}\,\frac{d\varphi_2}{dx_2}\cdots\frac{d\varphi_n}{dx_n}\cdot dx_1\,dx_2\ldots dx_n,$$

c'est-à-dire, d'après (123), (124),

$$\int^n U\,dy_1\,dy_2\ldots dy_n=\int^n U\,.\,P\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n,$$

(*) Bordoni, *Lezioni di Calcolo sublime*, tome I.

ce qui est précisément la formule cherchée. D'une manière analogue, on aura

$$\int^n \mathrm{U}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n = \int^n \mathrm{U} \,.\, \mathrm{Q}\, dy_1\, dy_2 \ldots dy_n.$$

Cette dernière équation, d'après la seconde (109), peut encore s'écrire,

$$\int^n \mathrm{U}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n = \int^n \mathrm{U}\sqrt{\mathrm{H}}\, dy_1\, dy_2 \ldots dy_n,$$

et dans l'hypothèse de $\mathrm{E}_{r,s} = 0$, on aura

$$\int^n \mathrm{U}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n = \int^n \mathrm{U}\sqrt{\mathrm{E}_{1,1}\, \mathrm{E}_{2,2} \ldots \mathrm{E}_{n,n}}\, dy_1\, dy_2 \ldots dy_n.$$

Supposons que les équations qui lient les x et les y soient de la forme

$$\frac{x_1^2}{y_r - a_1} + \frac{x_2^2}{y_r - a_2} + \ldots + \frac{x_n^2}{y_r - a_n} = 1,$$

où $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont des constantes. Ayant fait

$$\mathrm{F}(z) = (z - y_1)(z - y_2) \ldots (z - y_n),$$
$$f(z) = (z - a_1)(z - a_2) \ldots (z - a_n),$$

on a, comme on sait,

$$x_1^2 = -\frac{\mathrm{F}(a_1)}{f'(a_1)}, \quad x_2^2 = -\frac{\mathrm{F}(a_2)}{f'(a_2)}, \ldots, \quad x_n^2 = -\frac{\mathrm{F}(a_n)}{f'(a_n)},$$

et, par suite, en différentiant par rapport à y_r

$$x_1 x_1'(y_r) = \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{F}(a_1)}{f'(a_1)}\,\frac{1}{a_1 - y_r},$$
$$x_2 x_2'(y_r) = \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{F}(a_2)}{f'(a_2)}\,\frac{1}{a_2 - y_r},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n x_n'(y_r) = \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{F}(a_n)}{f'(a_n)}\,\frac{1}{a_n - y_r},$$

d'où

$$x_1'^2(y_r) = -\frac{1}{4}\frac{F(a_1)}{f'(a_1)}\frac{1}{(a_1 - y_r)^2},$$

$$x_2'^2(y_r) = -\frac{1}{4}\frac{F(a_1)}{f'(a_2)}\frac{1}{(a_2 - y_r)^2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$x_n'^2(y_r) = -\frac{1}{4}\frac{F(a_n)}{f'(a_n)}\frac{1}{(a_n - y_r)^2},$$

et

$$x_1'(y_r)\,x_1'(y_s) = -\frac{1}{4}\frac{F(a_1)}{f'(a_1)}\frac{1}{(a_1 - y_r)(a_1 - y_s)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$x_n'(y_r)\,x_n'(y_s) = -\frac{1}{4}\frac{F(a_n)}{f'(a_n)}\frac{1}{(a_n - y_r)(a_n - y_s)}.$$

Maintenant, si l'on se rappelle les formules

$$-\frac{F'(y_r)}{f(y_r)} = \frac{F(a_1)}{f'(a_1)}\frac{1}{(a_1 - y_r)^2} + \frac{F(a_2)}{f'(a_2)}\frac{1}{(a_2 - y_r)^2} + \cdots + \frac{F(a_n)}{f'(a_n)}\frac{1}{(a_n - y_r)^2}.$$

$$0 = \frac{F(a_1)}{f'(a_1)}\frac{1}{(a_1 - y_r)(a_1 - y_s)} + \frac{F(a_2)}{f'(a_2)}\frac{1}{(a_2 - y_r)(a_2 - y_s)} + \cdots + \frac{F(a_n)}{f'(a_n)}\frac{1}{(a_n - y_r)(a_n - y_s)},$$

on a

$$E_{r,s} = 0, \qquad E_{r,r} = \frac{1}{2}\frac{F'(y_r)}{f(y_r)},$$

et, par conséquent,

$$\int^n U\,dx_1\,dx_2 \ldots dx_n = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{F'(y_1)\,F'(y_2)\ldots F'(y_n)}}{\sqrt{f(y_1)\,f(y_2)\ldots f(y_n)}}.$$

Au moyen de cette formule, M. Catalan est parvenu à

étendre aux transcendantes abéliennes quelques-unes des propriétés appartenant aux fonctions elliptiques (*).

§ XI. — *Des déterminants de Hesse.*

Soit u une fonction entière homogène des n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. On désigne par $u_1, u_2, \ldots, u_n$ les dérivées premières de u par rapport à chacune de ces variables, et par $u_{1,1}, u_{1,2}, \ldots$ les dérivées secondes, en sorte que

$$u_{r,s} = u_{s,r} = \frac{d^2 u}{dx_r\, dx_s}.$$

Le déterminant

$$v = \begin{vmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} \ldots & u_{1,n} \\ u_{2,1} & u_{2,2} \ldots & u_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{n,1} & u_{n,2} \ldots & u_{n,n} \end{vmatrix}$$

est appelé l'*hessien* de la fonction u, ou le déterminant de Hesse, à cause de l'important usage qu'en a fait M. Hesse dans différentes recherches géométriques. Ce déterminant a été représenté par quelques géomètres par le symbole H_u. Il est évident que si la fonction u est du $m^{ième}$ degré, le déterminant v sera une fonction homogène du degre $n(m-2)$.

Supposons que les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ soient liées à n autres variables $y_1, y_2, \ldots, y_n$ par n équations linéaires analogues à

$$x_r = a_{1,r} y_1 + a_{2,r} y_2 + \ldots + a_{n,r} y_n.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans la fonction u et que l'on

(*) Mémoires couronnés par l'Académie de Bruxelles, 1841

pose

$$K = \Sigma\left(\pm \frac{d^2u}{dy_1^2}\,\frac{d^2u}{dy_2^2}\cdots\frac{d^2u}{dy_n^2}\right). \quad P = \Sigma(\pm a_{1,1}a_{2,2}\ldots a_{n,n}),$$

on aura

$$K = P^2.v.$$

En effet, en différentiant la fonction u par rapport à y_r, il vient

$$\frac{du}{dy_r} = u_1 a_{r,1} + u_2 a_{r,2} + \ldots + u_n a_{r,n},$$

et en différentiant cette dernière équation par rapport à y_s et par rapport à x_s, on obtient

$$\frac{d^2u}{dy_r dy_s} = \frac{du_1}{dy_s} a_{r,1} + \frac{du_2}{dy_s} a_{r,2} + \ldots + \frac{du_n}{dy_s} a_{r,n},$$

$$\frac{d^2u}{dy_r dx_s} = u_{1,s} a_{r,1} + u_{2,s} a_{r,2} + \ldots + u_{n,s} a_{r,n}.$$

D'après ces relations, et en s'appuyant sur la règle connue de multiplication des déterminants, on trouve aisément les deux équations

$$\Sigma\left(\pm \frac{d^2u}{dx_1 dy_1}\,\frac{d^2u}{dx_2 dy_2}\cdots\frac{d^2u}{dx_n dy_n}\right) = P.v,$$

$$K = P.\Sigma\left(\pm \frac{d^2u}{dx_1 dy_1}\,\frac{d^2u}{dx_2 dy_2}\cdots\frac{d^2u}{dx_n dy_n}\right),$$

dont la comparaison donne immédiatement

$$K = P^2.v.$$

Si la substitution était orthogonale, c'est-à-dire si les coefficients $a_{r,s}$ satisfaisaient aux deux équations

$$a_{r,1}^2 + a_{r,2}^2 + \ldots + a_{r,n}^2 = 1,$$

$$a_{r,1}a_{s,1} + a_{r,2}a_{s,2} + \ldots + a_{r,n}a_{s,n} = 0,$$

on aurait

$$P = 1, \quad \text{et par suite} \quad K = v.$$

Dans le cas d'une substitution quelconque, si la fonction dans laquelle u se transforme par cette substitution est indépendante de l'une quelconque des variables $y_1, y_2, \ldots, y_n$, le déterminant v sera identiquement nul; car si la variable manquante était, par exemple y_r, on aurait

$$\frac{d^2u}{dy_1 dy_r} = \frac{d^2u}{dy_2 dy_r} = \ldots = \frac{d^2u}{dy_n dy_r} = 0,$$

ce qui donnerait

$$K = 0, \quad \text{et par suite aussi} \quad v = 0.$$

Réciproquement, si le déterminant v est identiquement nul, on pourra, par une substitution linéaire, transformer la fonction u dans une fonction homogène de $(n-1)$ variables $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$. En effet, v étant égal à zéro, on aura, d'après l'équation (14),

$$\frac{dv}{du_{r,r}} \frac{dv}{du_{s,s}} = -\left(\frac{dv}{du_{r,s}}\right)^2,$$

et par suite les éléments réciproques du déterminant v admettront un facteur commun M du degré $(n-1)(m-2)$; en sorte que, en désignant par α_r, α_s deux constantes, on aura

$$(126) \qquad \frac{dv}{du_{r,r}} = \alpha_r^2 . M, \qquad \frac{dv}{du_{r,s}} = \alpha_r \alpha_s . M.$$

Maintenant u étant une fonction homogène du degré m, on a, comme on sait,

$$(127) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_{1,1} x_1 + u_{1,2} x_2 + \ldots + u_{1,n} x_n = (m-1) u_1, \\ u_{2,1} x_1 + u_{2,2} x_2 + \ldots + u_{2,n} x_n = (m-1) u_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_{n,1} x_1 + u_{n,2} x_2 + \ldots + u_{n,n} x_n = (m-1) u_n, \end{array} \right.$$

d'où l'on déduit, en général,

$$\frac{v}{m-1}x_r = u_1\frac{dv}{du_{1,r}} + u_2\frac{dv}{du_{2,r}} + \ldots + u_n\frac{dv}{du_{n,r}},$$

et quand on supposera

$$v = 0,$$

on aura, d'après (126),

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n = 0.$$

Faisons, dans la fonction u,

$$x_1 = z_1 + \lambda\alpha_1,\quad x_2 = z_2 + \lambda\alpha_2, \ldots,\quad x_n = z_n + \lambda\alpha_n,$$

où

$$z_r = a_{1,r}y_1 + a_{2,r}y_2 + \ldots + a_{n-1,r}y_{n-1},$$

et où λ désigne une constante indéterminée. En développant, on obtient

$$u = w + \lambda w' + \frac{\lambda^2}{2}w'' + \ldots + \frac{\lambda^m}{1.2\ldots m}w^{(m)},$$

en supposant que w représente ce que devient u, lorsqu'on y met $z_1, z_2, \ldots, z_n$, à la place de $x_1, x_2, \ldots, x_n$; et que w' représente la valeur de

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n$$

sous la même condition. Comme ensuite

$$w'' = \frac{dw'}{dz_1}\alpha_1 + \frac{dw'}{dz_2}\alpha_2 + \ldots + \frac{dw'}{dz_n}\alpha_n,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$w^{(m)} = \frac{dw^{(m-1)}}{dz_1}\alpha_1 + \frac{dw^{(m-1)}}{dz_2}\alpha_2 + \ldots + \frac{dw^{(m-1)}}{dz_n}\alpha_n.$$

lorsque l'expression $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n$ sera identiquement nulle, il en sera de même de w' et par suite aussi de $w'', w''', \ldots, w^{(m)}$, ce qui réduira le développement précédent à $u = w$, c'est-à-dire que la fonction u dans le cas

de ν identiquement nul peut se réduire à la fonction homogène w des $n-1$ variables $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$, comme on l'avait annoncé.

Cet important théorème, que l'on doit à M. Hesse (*), a été appliqué par le même auteur à la démonstration des deux propositions suivantes :

1°. Si $u=0$ représente l'équation rendue homogène d'une courbe plane du $n^{ième}$ ordre, la condition nécessaire et suffisante pour que la courbe se réduise à un faisceau de m droites, est que le déterminant ν soit identiquement nul.

2°. Si $u=0$ représente l'équation homogène d'une surface du $m^{ième}$ ordre, la condition nécessaire et suffisante pour que cette surface se réduise à un cône est que ν soit nul identiquement.

Des équations (127), en faisant $\dfrac{d\nu}{du_{r,s}} = \mathrm{U}_{r,s}$, on déduit

$$\nu x_r = (m-1)(\mathrm{U}_{1,r} u_1 + \mathrm{U}_{2,r} u_2 + \ldots + \mathrm{U}_{n,r} u_n),$$

d'où, en différentiant successivement par rapport à x_s et par rapport à x_r, les indices r et s étant supposés inégaux,

$$(128) \quad \left\{ \begin{aligned} \nu_s x_r &= (m-1)\left(\frac{d\mathrm{U}_{1,r}}{dx_s} u_1 + \frac{d\mathrm{U}_{2,r}}{dx_s} u_2 + \ldots + \frac{d\mathrm{U}_{n,r}}{dx_s} u_n\right), \\ \nu_r x_r &= (m-2)\nu + (m-1)\left(\frac{d\mathrm{U}_{1,r}}{dx_r} u_1 + \frac{d\mathrm{U}_{2,r}}{dx_r} u_2 + \ldots + \frac{d\mathrm{U}_{n,r}}{dx_r} u_n\right). \end{aligned} \right.$$

Par conséquent, si $u_1 = u_2 = \ldots = u_n = 0$, comme alors $\nu = 0$, on aura $\nu_r = 0$, quel que soit r; et de l'équation (14) il résultera

$$\frac{d\mathrm{U}_{r,r}}{dx_r} \mathrm{U}_{s,s} + \frac{d\mathrm{U}_{s,s}}{dx_r} \mathrm{U}_{r,r} = 2\,\mathrm{U}_{r,s} \frac{d\mathrm{U}_{r,s}}{dx_r},$$

(*) CRELLE, *Journal für die Mathematik*, Band XLII. 1851.

équation qui est satisfaite quand on prend

$$(129) \qquad U_{r,r} = N x_r^2, \quad U_{r,s} = N x_r x_s,$$

N étant un facteur commun à tous les éléments réciproques du déterminant v. En différentiant de nouveau l'équation (128) par rapport à x_i, il vient

$$(130) \left\{ \begin{aligned} v_{s,i} x_r = & (m-1)\left(\frac{d^2 U_{1,r}}{dx_s\, dx_i} u_1 + \frac{d^2 U_{2,r}}{dx_s\, dx_i} u_2 + \ldots + \frac{d^2 U_{n,r}}{dx_s\, dx_i} u_n\right) \\ & - (m-1)\left(U_{1,r}\frac{du_{1,s}}{dx_i} + U_{2,r}\frac{du_{2,s}}{dx_i} + \ldots + U_{n,r}\frac{du_{n,s}}{dx_i}\right), \end{aligned} \right.$$

en faisant attention que l'on a identiquement

$$\begin{aligned} & \frac{dU_{1,r}}{dx_s} u_{1,i} + \frac{dU_{2,r}}{dx_s} u_{2,i} + \ldots + \frac{dU_{n,r}}{dx_s} u_{n,i} \\ & \qquad = -\left(U_{1,r}\frac{du_{1,s}}{dx_i} + U_{2,r}\frac{du_{2,s}}{dx_i} + \ldots + U_{n,r}\frac{du_{n,s}}{dx_i}\right), \end{aligned}$$

à cause de la relation connue

$$U_{1,r} u_{1,i} + U_{2,r} u_{2,i} + \ldots + U_{n,r} u_{n,i} = 0.$$

Actuellement si $u_1 = u_2 = \ldots = u_n = 0$, d'après (130), on a

$$v_{s,i} x_r = -(m-1)\left(U_{1,r}\frac{du_{1,s}}{dx_i} + U_{2,r}\frac{dU_{2,s}}{dx_i} + \ldots + U_{n,r}\frac{du_{n,s}}{dx_i}\right),$$

ou, en substituant les valeurs (129),

$$v_{s,i} = -(m-1) N \left(x_1 \frac{du_{1,s}}{dx_i} + x_2 \frac{du_{2,s}}{dx_i} + \ldots + x_n \frac{du_{n,s}}{dx_i}\right),$$

ou enfin, d'après une propriété connue des fonctions homogènes,

$$v_{s,i} = -(m-1)(m-2) N . u_{s,i}.$$

Il résulte de là que lorsque les $u_1, u_2, \ldots, n_n$ sont égaux à zéro, non-seulement l'hessien de la fonction u, mais

encore l'*hessien* du même hessien, c'est-à-dire de v, sont aussi égaux à zéro. Dans le cas de $n = 3$, les équations $u_1 = u_2 = u_3 = 0$ sont satisfaites, comme on sait, aux points multiples de la ligne représentée par l'équation $u = 0$; et comme on doit avoir pour ces mêmes points $v = 0$, ils résulteront de l'intersection commune des deux courbes représentées par les équations $u = 0$, $v = 0$, et seront, en outre, des points multiples de la courbe $v = 0$.

Supposons présentement que $u = 0$ soit une équation algébrique, entière, rationnelle du $m^{ième}$ degré des $n - 1$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$; et considérons le déterminant

$$H = \begin{vmatrix} u_1 & u_{1,1} & u_{1,2} \ldots & u_{1,n-1} \\ u_2 & u_{2,1} & u_{2,2} \ldots & u_{2,n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{n-1} & u_{n-1,1} & u_{n-1,2} \ldots & u_{n-1,n-1} \\ 0 & u_1 & u_2 \ldots & u_{n-1} \end{vmatrix}$$

Si l'équation $u = 0$ est rendue homogène en y mettant $\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n}$ à la place des variables $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, et multipliant tous les termes par x_n^m, on aura toujours les équations (127) et

$$(131) \qquad u_1 x_1 + u_2 x_2 \ldots + u_n x_n = mu,$$

au moyen desquelles on pourra transformer le déterminant H de la manière suivante : il est évident que

$$H = \frac{1}{m-1} \begin{vmatrix} (m-1)\, u_1 & u_{1,1} & u_{1,2} \ldots & u_{1,n-1} \\ (m-1)\, u_2 & u_{2,1} & u_{2,2} \ldots & u_{2,n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (m-1)\, u_{n-1} & u_{n-1,1} & u_{n-1,2} \ldots & u_{n-1,n-1} \\ 0 & u_1 & u_2 \ldots & u_{n-1} \end{vmatrix}$$

et comme en ajoutant respectivement aux éléments de la première colonne ceux de la seconde multipliés par $-x_1$,

ceux de la troisième multipliés par $-x_2$, etc., la valeur du déterminant H ne change pas, on a, d'après les équations (127) et (131),

$$H = \frac{1}{m-1} \begin{vmatrix} x_n u_{1,n} & u_{1,1} & u_{1,2} \ldots & u_{1,n-1} \\ x_n u_{2,n} & u_{2,1} & u_{2,2} \ldots & u_{2,n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n u_{n-1,n} & u_{n-1,1} & u_{n-1,2} \ldots & u_{n-1,n-1} \\ x_n u_n - mu & u_1 & u_2 \ldots & u_{n-1} \end{vmatrix}$$

ou bien

$$H = -\frac{m}{m-1} \begin{vmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} \ldots & u_{1,n-1} \\ u_{2,1} & u_{2,2} \ldots & u_{2,n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{n-1,1} & u_{n-1,2} \ldots & u_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{n-1} \frac{x_n}{m-1} \begin{vmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} \ldots & u_{1,n} \\ u_{2,1} & u_{2,2} \ldots & u_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{n-1,1} & u_{n-1,2} \ldots & u_{n-1,n} \\ u_1 & u_2 \ldots & u_n \end{vmatrix}.$$

Observons que le dernier de ces deux déterminants peut s'écrire

$$\frac{1}{m-1} \begin{vmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} \ldots & u_{1,n} \\ u_{2,1} & u_{2,2} \ldots & u_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{n-1,1} & u_{n-1,2} \ldots & u_{n-1,n} \\ (m-1) u_1 & (m-1) u_2 \ldots & (m-1) u_n \end{vmatrix}$$

donc en faisant subir à cette expression l'opération ci-dessus indiquée, on aura

$$H = -\frac{m}{m-1} u \begin{vmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} \ldots & u_{1,n-1} \\ u_{2,1} & u_{2,2} \ldots & u_{2,n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{n-1,1} & u_{n-2,2} \ldots & u_{n-1,n-1} \end{vmatrix} + (-1)^{n-1} \frac{x_n^2}{(m-1)^2} . v.$$

De cette équation on conclut que pour les valeurs de x_1, $x_2, \ldots$, qui rendent $u=0$ et $H=0$, on aura en même temps $v=0$.

Application.

En désignant par r le rayon de courbure d'une courbe plane représentée par l'équation $u=0$, on a

$$(132) \qquad r = \pm \frac{(u_1^2 + u_2^2)^{\frac{3}{2}}}{H}.$$

Aux points d'inflexion de cette courbe, on a, comme on sait, $r=\infty$, et par suite $H=0$, ou bien, par le théorème précédent,

$$v = \begin{vmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ u_{2,1} & u_{2,2} & u_{2,3} \\ u_{3,1} & u_{3,2} & u_{3,3} \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation représente une courbe de l'ordre $3(m-2)$ qui coupe la proposée en ses points d'inflexion; le nombre de ces points sera donc au plus $3m(m-2)$ (*).

En désignant par r_1, r_2 les rayons principaux de courbure d'une surface $u=0$, on a

$$r_1 r_2 = \frac{(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)^2}{H}.$$

Pour les points de la surface en lesquels un des rayons de courbure est infini, on a $H=0$, et, par suite,

$$v = \begin{vmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} & u_{1,4} \\ u_{2,1} & u_{2,2} & u_{2,3} & u_{2,4} \\ u_{3,1} & u_{3,2} & u_{3,3} & u_{3,4} \\ u_{4,1} & u_{4,2} & u_{4,3} & u_{4,4} \end{vmatrix} = 0.$$

(*) CRELLE, *Journal für die Mathematik,* Band XXVIII. — SALMON, *On the higher plane curves,* page 72.

Cette équation représente une surface du degré $4(m-2)$, et la ligne d'intersection de cette surface avec la proposée $u=0$ sera une ligne d'*inflexion* ou la ligne des points *paraboliques* pour cette dernière surface (*).

Exemples. — Considérons l'équation des courbes du troisième ordre qu'on peut toujours réduire, comme on sait, à la forme

$$u = a_1 x_1^3 + a_2 x_2^3 + a_3 x_3^3 + 6 h x_1 x_2 x_3 = 0,$$

nous aurons

$$v = 6^3 \begin{vmatrix} a_1 x_1 & hx_3 & hx_2 \\ hx_3 & a_2 x_2 & hx_1 \\ hx_2 & hx_1 & a_3 x_3 \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui revient à

$$h^2 (a_1 x_1^3 + a_2 x_2^3 + a_3 x_3^3) - k x_1 x_2 x_3 = 0,$$

où $k = a_1 a_2 a_3 + 2h^3$. Observons qu'en égalant à zéro l'hessien du premier membre de cette équation, on a

$$3h^2 k^2 (a_1 x_1^3 + a_2 x_2^3 + a_3 x_3^3) + (k^3 - 108 a_1 a_2 a_3 h^6) x_1 x_2 x_3 = 0,$$

équation qui, en posant

$$3h^2 k^2 = \lambda + \mu h^2, \quad k^3 - 108 a_1 a_2 a_3 h^6 = 6\lambda k - \mu k,$$

se réduit évidemment à

$$(133) \qquad \lambda u - \frac{1}{6^3} \mu v = 0.$$

Les valeurs de λ, μ se déduisent aisément des deux équations précédentes et ont pour expression

$$\lambda = 4h^2 (h^3 - a_1 a_2 a_3)^2, \quad \mu = 8h^6 + 20 a_1 a_2 a_3 h^3 - a_1^2 a_2^2 a_3^2.$$

(*) GERGONNE, *Annales de Mathématiques*, tome XXI. — *The Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, 1848-1849.

L'équation (133) étant évidemment satisfaite pour les valeurs de x_1, x_2, x_3 qui rendent $u = 0$, $v = 0$, il en résulte cette intéressante propriété que les points d'intersection des deux courbes $u = 0$, $v = 0$ sont encore des points d'intersection pour la seconde de ces courbes (*). Cette propriété n'a lieu que pour les lignes du troisième ordre.

Désignons par w une fonction algébrique entière, rationnelle de degré r des $n - 1$ variables $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$, et ayant posé

$$k = \begin{vmatrix} w_1 & w_{1,1} & w_{1,2} \ldots & w_{1,n-1} \\ w_2 & w_{2,1} & w_{2,2} \ldots & w_{2,n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ w_{n-1} & w_{n-1,1} & w_{n-1,2} \ldots & w_{n-1,n-1} \\ 0 & w_1 & w_2 \ldots & w_{n-1} \end{vmatrix}$$

rendons homogène l'équation $w = 0$ en substituant aux $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ les rapports

$$\frac{z_1}{z_n}, \quad \frac{z_2}{z_n}, \ldots, \quad \frac{z_{n-1}}{z_n},$$

on aura

$$\mathrm{K} = -\frac{r}{r-1} w \begin{vmatrix} w_{1,1} & w_{1,2} \ldots & w_{1,n-1} \\ w_{2,1} & w_{2,2} \ldots & w_{2,n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ w_{n-1,1} & w_{n-1,2} \ldots & w_{n-1,n-1} \end{vmatrix} + (-1)^{n-1} \frac{z_n^2}{(r-1)^2} \mathrm{V},$$

V représentant l'hessien de la fonction w. Supposons que les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ soient liées aux variables z_1, $z_2, \ldots, z_n$ par les deux systèmes d'équations

$$w_1 = x_1, \quad w_2 = x_2, \ldots, \quad w_n = x_n,$$
$$u_1 = z_1, \quad u_2 = z_2, \ldots, \quad u_n = z_n,$$

on aura évidemment n^2 équations que l'on peut déduire des

(*) Crelle, *Journal für die Mathematik*. Band XXVIII.

deux suivantes

$$w_{1,r}\ u_{1,r} + w_{2,r}\ u_{2,r} + \ldots + w_{n,r}\ u_{n,r} = 1,$$

$$w_{1,s}\ u_{1,r} + w_{2,s}\ u_{2,r} + \ldots + w_{n,s}\ u_{n,r} = 0,$$

en supposant r et $s = 1, 2, \ldots, n$. Ces équations donneront

(134) $$Vv = 1,$$

et pour les valeurs de $x_1, x_2, \ldots, z_1, z_2, \ldots$, qui rendent $u = 0$, $v = 0$, il viendra

$$x_1 z_1 + x_2 z_2 + \ldots + x_n z_n = 0.$$

L'équation (134) fait voir qu'à $v = \infty$ correspond $V = 0$.

Application.

Aux points de rebroussement d'une courbe plane $u = 0$, on a $r = 0$; donc par (132) $H = \infty$ et $v = \infty$; donc

$$V = \begin{vmatrix} w_{1,1} & w_{1,2} & w_{1,3} \\ w_{2,1} & w_{2,2} & w_{2,3} \\ w_{3,1} & w_{3,2} & w_{3,3} \end{vmatrix} = 0.$$

Les variables $x_1, x_2, x_3, z_1, z_2, z_3$ étant liées par l'équation

$$x_1 z_1 + x_2 z_2 + x_3 z_3 = 0,$$

les z_1, z_2, z_3 pourront représenter des coordonnées *linéaires* ou *tangentielles*, et l'équation $V = 0$ appartiendra à une courbe de la classe $3(r - 2)$, laquelle coupera les deux courbes $u = 0$, $w = 0$ en leurs points de rebroussement. Par conséquent, une courbe de la $r^{ième}$ classe a en général $3r(r - 2)$ points de rebroussement (*). Pareillement pour les points d'une surface en lesquels un des rayons principaux de courbure est nul, on a $V = 0$, et comme les

---

(*) Crelle, *Journal für die Mathematik.* Band XXXVIII.

variables z_1, z_2, z_3, z_4 doivent satisfaire à

$$x_1 z_1 + x_2 z_2 + x_3 z_3 + x_4 z_4 = 0,$$

ces variables représenteront des coordonnées *linéaires* ou *planaires*, en sorte que l'équation $V = 0$ appartiendra à une surface de la classe $4(r-2)$, dont l'intersection avec $u = 0$ ou $w = 0$ est une ligne de rebroussement pour cette dernière surface.

Observons que lorsque V est identiquement nul, la fonction w, d'après ce qu'on a démontré précédemment, peut, par une substitution linéaire, se réduire à une fonction homogène de $n-1$ variables. Cette propriété pour $n = 3$ et $n = 4$ donne lieu aux deux théorèmes suivants :

1°. Si l'hessien du premier membre de l'équation $w = 0$ d'une courbe plane rapportée à des coordonnées tangentielles est identiquement nul, cette équation représente une série de points situés en ligne droite.

2°. Si l'hessien du premier membre de l'équation $w = 0$ d'une surface rapportée à des coordonnées planaires est nul identiquement, cette équation représente une courbe plane.

En invoquant la théorie des polaires réciproques, on pourrait déduire ces deux théorèmes de ceux de M. Hesse énoncés page 133.

APPENDICE.

NOTE DE L'AUTEUR

DESTINÉE

A ÊTRE INTRODUITE DANS L'APPLICATION PREMIÈRE

DU § III, PAGE 13.

Considérons le déterminant

$$D_r = \begin{vmatrix} a_1 & m_1 & 0 \dots & 0 & 0 \\ n_1 & a_2 & m_2 \dots & 0 & 0 \\ 0 & n_2 & a_3 \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots & a_{r-1} & m_{r-1} \\ 0 & 0 & 0 \dots & n_{r-1} & a_r \end{vmatrix}.$$

D'après la formule (14), on aura

$$D_r \cdot \frac{d^2 D_r}{da_r\, da_{r-1}} = \frac{dD_r}{da_r}\,\frac{dD_r}{da_{r-1}} - \frac{dD_r}{dm_{r-1}}\,\frac{dD_r}{dn_{r-1}}.$$

Or

$$\frac{d^2 D_r}{da_r\, da_{r-1}} = D_{r-2}, \qquad \frac{dD_r}{da_r} = D_{r-1}, \qquad \frac{dD_r}{da_{r-1}} = a_r D_{r-2},$$

$$\frac{dD_r}{dm_{r-1}} = -\,n_{r-1} D_{r-2}, \qquad \frac{dD_r}{dn_{r-1}} = -\,m_{r-1} D_{r-2};$$

donc, en substituant, il viendra

$$D_r = a_r D_{r-1} - n_{r-1} m_{r-1} D_{r-2}.$$

On voit par cette relation que le déterminant D_r pourra représenter le terme général d'une série récurrente déterminée; et comme, pour

$$n_1 = n_2 = \ldots = n_{r-1} = -1, \qquad m_1 = m_2 = \ldots = m_{r-1} = 1,$$

cette même relation devient

$$D_r = a_r D_{r-1} + D_{r-2};$$

D_r, dans ce cas particulier, sera propre à représenter le dénominateur de la $r^{ième}$ réduite de la fraction continue

$$\cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

De la formule (14) on déduit encore

$$D_r \frac{d^2 D_r}{da_1\, da_r} = \frac{dD_r}{da_1}\frac{dD_r}{da_r} - \frac{dD_r}{d\alpha}\frac{dD_r}{d\beta}$$

(en appelant α l'élément zéro situé dans la première ligne et dans la dernière colonne, et β l'élément zéro situé dans la dernière ligne et la première colonne); et si l'on fait

$$\frac{dD_r}{da_1} = N_r,$$

il en résulte en général

$$D_r N_{r-1} = N_r D_{r-1} - m_1 m_2 \ldots m_{r-1} n_1 n_2 \ldots n_{r-1}:$$

ce qui, pour l'hypothèse ci-dessus, devient

$$D_r N_{r-1} - N_r D_{r-1} = (-1)^r,$$

et fait voir que N_r est propre à représenter le numérateur de la $r^{ième}$ réduite.

Par la formule (13) relative à la décomposition des dé-

terminants, on a ensuite

$$D_r = D_{r-s}\frac{d^{r-s}D_r}{da_1\, da_2 \ldots da_{r-s}} - n_{r-s}m_{r-s}D_{r-s-1}\frac{d^{r-s+1}D_r}{da_1\, da_2 \ldots da_{r-s+1}},$$

résultat que M. Stern a fait connaître pour le cas des fractions continues (*Journal* de Crelle, tomes VIII et X). On doit à M. Sylvester la représentation sous forme de déterminants des termes d'une réduite d'une fraction continue.

On remarquera que les termes d'une pareille réduite sont des déterminants gauches.

NOTE DE L'AUTEUR

RELATIVE A L'APPLICATION Ire

DU § VIII, PAGE 77.

Théorème. — L'équation

$$\begin{vmatrix} c_{2,1} - x & c_{1,2} \ldots\ldots & c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} - x \ldots & c_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n,1} & c_{n,2} \ldots\ldots & c_{n,n} - x \end{vmatrix} = 0$$

a, pour le cas de n impair, une de ses racines égale à 1, et les $n-1$ autres imaginaires et réciproques deux à deux; et pour n pair toutes les racines sont imaginaires et deux à deux réciproques.

En effet, en substituant dans le premier membre de cette équation les valeurs (83) de $c_{1,1}$, $c_{1,2}$,..., il vient

$$\begin{vmatrix} \alpha_{1,1} - t & \alpha_{2,1} \ldots\ldots & \alpha_{n,1} \\ \alpha_{1,2} & \alpha_{2,2} - t \ldots & \alpha_{n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{1,n} & \alpha_{2,n} \ldots\ldots & \alpha_{n,n} - t \end{vmatrix} = 0,$$

où

$$t = \mathrm{P}\,\frac{1+x}{2};$$

et si l'on multiplie cette dernière par P et qu'on pose

$$z = \frac{x-1}{x+1}, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{1+z}{1-z},$$

il en résulte

$$(a) \qquad \begin{vmatrix} z & a_{1,2} \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & z \dots \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} \dots & z \end{vmatrix} = 0.$$

Développant cette équation au moyen des formules de la page 74, on aura pour n impair

$$z^n + z^{n-2}\,\Sigma_i({}^{(n-2)}\mathrm{P}_{i,i})_0 + z^{n-4}\,\Sigma_i({}^{(n-4)}\mathrm{P}_{i,i})_0 + \dots$$
$$+ z^3\,\Sigma_i({}^{(3)}\mathrm{P}_{i,i})_0 + z\,\Sigma_i({}^{(1)}\mathrm{P}_{i,i})_0 = 0,$$

pour n pair

$$z^n + z^{n-2}\,\Sigma_i({}^{(n-2)}\mathrm{P}_{i,i})_0 + z^{n-4}\,\Sigma_i({}^{(n-4}\mathrm{P}_{i,i})_0 + \dots$$
$$+ z^2\,\Sigma_i({}^{(2)}\mathrm{P}_{i,i})_0 + \mathrm{P}_0 = 0.$$

Dans le premier cas, l'une des racines de l'équation (a) sera nulle, et les autres, égales deux à deux et de signes contraires, seront données par l'équation

$$(b) \quad y^m + y^{m-1}\,\Sigma_i({}^{(n-2)}\mathrm{P}_{i,i})_0 + \dots + y\,\Sigma({}^{(3)}\mathrm{P}_{i,i})_0 + \Sigma_i({}^{(1)}\mathrm{P}_{i,i})_0 = 0,$$

où

$$y = z^2 \quad \text{et} \quad m = \frac{n-1}{2}.$$

Or les coefficients de cette équation étant essentiellement positifs, comme déterminants gauches symétriques d'ordre impair, ses racines seront toutes négatives : ce qui démontre la première partie du théorème. La seconde se démontre de la même manière.

En représentant par $-y_r$ une quelconque des racines de l'équation (b) et écrivant i pour $\sqrt{-1}$, on a

$$z = \pm i\sqrt{y_r},\quad x_r = \frac{1 + i\sqrt{y_r}}{1 - i\sqrt{y_r}},\quad x'_r = \frac{1 - i\sqrt{y_r}}{1 + i\sqrt{y_r}},$$

ou

$$x_r = a + ib,\quad x'_r = a - ib,$$

en faisant

$$a = \frac{1 - y_r}{1 + y_r},\quad b = \frac{2\sqrt{y_r}}{1 + y_r}.$$

Soit

$$a \pm ib = \rho(\cos\theta_r \pm i \sin\theta_r),$$

d'où

$$\rho^2 = a^2 + b^2 = 1,\quad \operatorname{tang}\theta_r = \frac{b}{a} = \frac{2\sqrt{y_r}}{1 - y_r},$$

et, par suite,

$$\sqrt{y_r} = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta_r;$$

on aura

$$\Sigma_i\left({}^{(1)}P_{i,i}\right)_0 = \operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\theta_1 \operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\theta_2 \ldots \operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\theta_m,$$

$$\Sigma_i\left({}^{(n-2)}P_{i,i}\right)_0 = \Sigma_r\Sigma_s a^2_{r,s} = \operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\theta_1 + \operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\theta_2 + \ldots$$
$$+ \operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\theta_m.$$

Pour $n = 3$, l'équation (b) donne, en ayant égard à (85),

$$y + \lambda^2 + p^2 + \nu^2 = 0,$$

et l'on a

$$\lambda^2 + p^2 + \nu^2 = \operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\theta,$$

ou

$$= \cos\alpha \operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta,\quad p = \cos\beta \operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta,\quad \nu = \cos\gamma \operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta,$$

en supposant

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Pour $n = 5$, on aura

$$a_{1,2}^2 + a_{1,3}^2 + \ldots + a_{1,5}^2 + a_{2,3}^2 + \ldots + a_{2,5}^2 + a_{3,4}^2 + a_{3,5}^2 + a_{4,5}^2$$
$$= \tang^2 \frac{1}{2}\theta_1 + \tang^2 \frac{1}{2}\theta_2.$$

NOTE DE L'AUTEUR

SE RAPPORTANT A LA IIe APPLICATION

DU § V, PAGE 30.

Considérons une ligne quelconque tracée sur une surface et soient a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3, a, b, c les cosinus des angles que font avec trois axes orthogonaux la tangente, le rayon de courbure, l'axe du plan osculateur et la normale à la surface en un même point de la courbe. Soit de plus ω l'angle de la seconde et de la dernière de ces droites, on aura

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} aa_1 + bb_1 + cc_1 = 0, \\ aa_2 + bb_2 + cc_2 = \cos\omega, \\ aa_3 + bb_3 + cc_3 = \sin\omega. \end{array} \right.$$

En différentiant ces équations par rapport à une variable indépendante quelconque t et posant

$$\frac{d\varphi}{dt} = \varphi', \quad \frac{d\psi}{dt} = \psi'$$

($d\varphi$ et $d\psi$ étant les angles de contingence et de torsion), il

vient

$$
(2)\quad \begin{cases} a'a_1 + b'b_1 + c'c_1 = -\varphi'\cos\omega, \\ a'a_2 + b'b_2 + c'c_2 = (\psi' - \omega')\sin\omega, \\ a'a_3 + b'b_3 + c'c_3 = (\psi' - \omega')\cos\omega; \end{cases}
$$

d'où

$$
\begin{aligned}
a' &= -a_1\varphi'\cos\omega + (a_2\sin\omega - a_3\cos\omega)(\psi' - \omega'),\\
b' &= -b_1\varphi'\cos\omega + (b_2\sin\omega - b_3\cos\omega)(\psi' - \omega'),\\
c' &= -c_1\varphi'\cos\omega + (c_2\sin\omega - c_3\cos\omega)(\psi' - \omega').
\end{aligned}
$$

Appelons ζ le complexe (*complexus*) des déviations successives des normales à la surface le long de la ligne considérée, en sorte que $\zeta = \int\sqrt{\left(\frac{da}{ds}\right)^2 + \left(\frac{db}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dc}{ds}\right)^2}\,ds$; on aura

$$
\zeta'^2 = a'^2 + b'^2 + c'^2 = \varphi'^2\cos^2\omega + (\psi' - \omega')^2.
$$

Concevons la surface développable qui touche la surface le long de la ligne dont il s'agit. La génératrice rectiligne de cette surface étant perpendiculaire à deux normales consécutives, les cosinus des angles qu'elle fait avec les axes auront pour expressions

$$
\frac{1}{\zeta'}(bc' - b'c),\quad \frac{1}{\zeta'}(ca' - c'a),\quad \frac{1}{\zeta'}(ab' - a'b),
$$

et conséquemment en désignant par ε l'angle compris entre la tangente et la génératrice, ou, si l'on veut, entre la tangente et sa tangente conjuguée, on aura

$$
\zeta' = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}
$$

Or, en ayant égard aux équations (1) et (2),

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\varphi'\cos\omega \\ 0 & 1 & 0 \\ -\varphi'\cos\omega & 0 & \zeta'^2 \end{vmatrix} = \zeta'^2 - \varphi'^2\cos^2\omega;$$

donc

$$\zeta'\cos\varepsilon = \pm(\psi' - \omega'), \quad \zeta'\sin\varepsilon = \pm\varphi'\cos\omega, \quad \text{tang}\,\varepsilon = \frac{\varphi'\cos\omega}{\psi' - \omega'}.$$

Corollaire I. — Si la courbe considérée est une ligne de courbure de la surface, on a $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$, et, par suite,

$$\psi' - \omega' = 0, \quad \zeta' = \pm\varphi'\cos\omega = \pm\frac{s'}{R},$$

R désignant le rayon principal de courbure qui correspond à cette ligne, et s' étant mis pour $\frac{ds}{dt}$. La première de ces équations est la traduction analytique d'un théorème de Lancret démontré géométriquement par M. Liouville. On en déduit deux théorèmes de Jacobi et de Joachimsthal.

En combinant ces équations avec les équations (3), on obtient

$$a' = -\frac{s'}{R}a_1, \quad b' = -\frac{s'}{R}b_1, \quad c' = -\frac{s'}{R}c_1,$$

propriété des lignes de courbure mise en lumière par M. Bonnet.

Corollaire II. — S'il s'agit d'une ligne géodésique, on a $\omega = 0$ et, par suite,

$$\zeta'^2 = \varphi'^2 + \psi'^2, \quad \cos\varepsilon = \frac{\pm\psi'}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}}, \quad \sin\varepsilon = \frac{\pm\varphi'}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}},$$

résultat connu.

Corollaire III. — Si la surface est un ellipsoïde repré-

senté par l'équation

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1,$$

en désignant par p la longueur de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur le plan tangent, on a

$$a = p\,\frac{x}{\alpha^2}, \quad b = p\,\frac{y}{\beta^2}, \quad c = p\,\frac{z}{\gamma^2};$$

d'où

$$a' = \frac{p'}{p}\,a + ps'\,\frac{a_1}{\alpha_2}, \quad b' = \frac{p'}{p}\,b + ps'\,\frac{b_1}{\beta^2}, \quad c' = \frac{p'}{p}\,c + ps'\,\frac{c_1}{\gamma^2}.$$

Les deux premières équations (2) deviendront ici

$$ps'\left(\frac{a_1^2}{\alpha^2} + \frac{b_1^2}{\beta^2} + \frac{c_1^2}{\gamma^2}\right) = -\varphi'\cos\omega,$$

$$\frac{p'}{p}\cos\omega + ps'\left(\frac{a_1\,a_2}{\alpha^2} + \frac{b_1\,b_2}{\beta^2} + \frac{c_1\,c_2}{\gamma^2}\right) = (\psi' - \omega')\sin\omega.$$

Or, en appelant d le demi-diamètre de l'ellipsoïde parallèle à la tangente à la courbe arbitrairement tracée sur cette surface, on a

$$\frac{1}{d^2} = \frac{a_1^2}{\alpha^2} + \frac{b_1^2}{\beta^2} + \frac{c_1^2}{\gamma^2};$$

donc

$$p\,\frac{s'}{d^2} = -\varphi'\cos\omega, \quad \frac{p'}{p}\cos\omega - \frac{ps'}{d^2}\cdot\frac{d'}{d} = (\psi' - \omega')\sin\omega;$$

d'où résulte

$$\frac{p'}{p} + \frac{d'}{d} = (\psi' - \omega')\,\mathrm{tang}\,\omega.$$

Quand on suppose $\omega = \text{const.}$, cette dernière équation donne

$$pd = \mathrm{A}\,e^{\psi},$$

A désignant une constante. Pour $\psi' = 0$, c'est-à-dire pour une ligne plane quelconque,

$$pd = \mathrm{A}\cos\omega.$$

Enfin pour $\psi' - \omega' = 0$ ou pour $\omega = 0$, c'est-à-dire s'il s'agit d'une ligne de courbure ou d'une ligne géodésique de l'ellipsoïde, on a

$$pd = \text{const.},$$

résultat obtenu par M. Joachimsthal.

NOTE DE L'AUTEUR

SUR

QUELQUES QUESTIONS D'ALGÈBRE SUPÉRIEURE.

(Extrait des *Annales des Sciences Mathématiques et Physiques* publiées à Rome. Août 1854).

1°. Soient $f(x)$, $\varphi(x)$ deux fonctions algébriques, rationnelles, entières et des degrés n, m respectivement; $n > m$. On représente par $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les racines supposées inégales de l'équation $f(x) = 0$; et l'on pose

$$(1) \qquad \frac{x_1^r\,\varphi(x_1)}{f'(x_1)} + \frac{x_2^r\,\varphi(x_2)}{f'(x_2)} + \ldots + \frac{x_n^r\,\varphi(x_n)}{f'(x_n)} = \mathrm{S}_r,$$

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n,$$

$$\varphi(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} + \ldots + b_m.$$

$$m = n - e.$$

Théorème I. — En supposant $r < n$ et $\omega = r - e + 1$ on a

$$(2) \qquad a_0\,\mathrm{S}_r + a_1\,\mathrm{S}_{r-1} + a_2\,\mathrm{S}_{r-2} + \ldots + a_r\,\mathrm{S}_0 = b_\omega.$$

Effectivement, si l'on représente par M_r le premier membre de cette équation, et qu'on y substitue les valeurs de S_r, S_{r-1}, . . ., on obtient

$$M_r = \Sigma_s \left[(a_0 x_s^r + a_1 x_s^r + \ldots + a_{r-1} x_s + a_r) \frac{\varphi(x_s)}{f'(x_s)} \right];$$

mais

$$(3) \qquad \frac{da_{r+1}}{dx_s} = -(a_0 x_s^r + a_1 x_s^{r-1} + \ldots + a_{r-1} x_s + a_r)$$

(*voir* à la fin de cet article);

donc

$$M_r = -\Sigma_s \left[\frac{da_{r+1}}{dx_s} \frac{\varphi(x_s)}{f'(x_s)} \right],$$

ou bien

$$-M_r = b_0 \Sigma_s \left[\frac{da_{r+1}}{dx_s} \frac{x_s^m}{f'(x_s)} \right] + b_1 \Sigma_s \left[\frac{da_{r+1}}{dx_s} \frac{x_s^{m-1}}{f'(x_s)} \right] + \ldots$$
$$+ b_m \Sigma_s \left[\frac{da_{r+1}}{dx_s} \frac{1}{f'(x_s)} \right],$$

ou bien encore, en observant que

$$(4) \qquad \frac{dx_s}{da_i} = -\frac{x_s^{n-i}}{f'(x_s)},$$

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} M_r = b_0 \Sigma_s \left[\frac{da_{r+1}}{dx_s} \frac{dx_s}{da_e} \right] + b_1 \Sigma \left[\frac{da_{r+1}}{dx_s} \frac{dx_s}{da_{e+1}} \right] + \ldots \\ + b_m \Sigma_s \left[\frac{da_{r+1}}{dx_s} \frac{dx_s}{da_n} \right], \end{aligned} \right.$$

et si l'on suppose $r + 1 = e + \omega$, cette équation donne

$$M_r = b_\omega.$$

Dans les applications de cette formule, lorsqu'on trouvera $\omega < 0$, il faudra faire $M_r = 0$, comme cela résulte de l'équation (5).

L'hypothèse $r = n$ entraîne évidemment $M_n = 0$, et l'on a en même temps

$$(6) \qquad a_0 S_{n+r} + a_1 S_{n+r-1} + \ldots + a_n S_r = 0.$$

Dans le cas particulier où $\varphi(x) = f'(x)$, les équations (2) et (6) sont les relations bien connues entre les coefficients et les sommes des puissanees des racines de l'équation $f(x) = 0$.

On a supposé dans ce qui précède $m < n$; si l'on avait $m = n$ (*), on trouverait, par une légère modification de la méthode,

$$(2') \qquad a_0 S_r + a_1 S_{r-1} + a_2 S_{r-2} + \ldots + a_r S_0 = b_{r+1} - \frac{b_0 a_{r+1}}{a_0},$$

ce qui, dans le cas de $r = 0$, reproduit la formule connue

$$\Sigma_s \frac{\varphi(x_s)}{f'(x_s)} = \frac{b_1}{a_0} - \frac{b_0 a_1}{a_0^2}.$$

Pour montrer l'analogie des S_r avec les sommes des puissances des racines, soit fait, pour abréger,

$$A_r = \sqrt{\frac{\varphi(x_r)}{f'(x_r)}},$$

et considérons le déterminant

$$H = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \ldots & A_n \\ A_1 x_1 & A_2 x_2 \ldots & A_n x_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_1 x_1^{n-1} & A_2 x_2^{n-1} \ldots & A_n x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

on a évidemment

$$(\alpha) \qquad H^2 = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 \ldots & S_{n-1} \\ S_1 & S_2 \ldots & S_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ S_{n-1} & S_n \ldots & S_{2n-2} \end{vmatrix} = \nabla;$$

(*) Ce qui suit jusqu'à 2° est emprunté à un manuscrit de l'auteur, postérieur à la Note des *Annales* de M. Tortolini. (*Note du Traducteur.*)

mais

$$H = A_1 A_2 \ldots A_n \begin{vmatrix} 1 & 1 \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 \ldots & x_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

et, par suite,

$$H^2 = A_1^2 A_2^2 \cdots A_n^2 \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \ldots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 \ldots & s_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{n-1} & s_n \ldots & s_{2n-2} \end{vmatrix}$$

où $s_r = x_1^r + x_2^r + \ldots + x_n^r$. Par conséquent, en représentant par Δ ce dernier déterminant, on aura

$$(a) \qquad A_1^2 A_2^2 \cdots A_n^2 \Delta = \nabla.$$

Or on sait que

$$f'(x_1) f'(x_2) \ldots f'(x_n) = \Delta;$$

donc

$$(b) \qquad \varphi(x_1)\ \varphi(x_2) \ldots\ \varphi(x_n) = \nabla.$$

Voici un autre résultat auquel sa singularité donne quelque importance. Considérons le déterminant

$$M = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \ldots & A_n \\ A_1 x_1 & A_2 x_2 \ldots & A_n x_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_1 x_1^{n-2} & A_2 x_2^{n-2} \ldots & A_n x_n^{n-2} \\ 1 & 0 \ldots & 0 \end{vmatrix} = A_2 A_3 \ldots A_n \begin{vmatrix} 1 & 1 \ldots & 1 \\ x_2 & x_3 \ldots & x_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} \ldots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

On a

$$M^2 = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 \ldots & S_{n-2} & A_1 \\ S_1 & S_2 \ldots & S_{n-1} & A_1 x_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ S_{n-2} & S_{n-1} \ldots & S_{2n-4} & A_1 x_1^{n-2} \\ A_1 & A_1 x_1 \ldots & A_1 x_1^{n-2} & 1 \end{vmatrix}$$

et si l'on fait

$$\begin{vmatrix} S_0 & S_1 \ldots & S_{n-2} & 1 \\ S_1 & S_2 \ldots & S_{n-1} & x_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ S_{n-2} & S_{n-1} \ldots & S_{2n-4} & x_1^{n-2} \\ 1 & x_1 \ldots & x_1^{n-2} & 0 \end{vmatrix} = k_1$$

on pourra encore écrire

$$M^2 = \frac{d\nabla}{dS_{2n-2}} + A_1^2 k_1.$$

Or on sait que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \ldots & 1 \\ x_2 & x_3 \ldots & x_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} \ldots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}^2 = \frac{\Delta}{f'(x_1)^2};$$

donc, en se reportant à la seconde expression de M, on aura

$$A_2^2 A_3^2 \ldots A_n^2 \frac{\Delta}{f'(x_1)^2} = \frac{d\nabla}{dS_{2n-2}} + A_1^2 k_1.$$

Si l'on multiplie les deux membres de cette équation par $A_2^2 A_3^2 \ldots A_n^2$, et qu'on ait égard à l'équation (*a*), il vient

$$A_2^4 A_3^4 \ldots A_n^4 \frac{\Delta}{f'(x_1)^2} = A_2^2 A_3^2 \ldots A_n^2 \frac{d\nabla}{dS_{2n-2}} + k_1 \frac{\nabla}{\Delta},$$

ou bien

$$\varphi(x_2)^2\ \varphi(x_3)^2 \ldots\ \varphi(x_n)^2 = \varphi(x_2)\ \varphi(x_3)\ldots\ \varphi(x_n)\ f'(x_1)\frac{d\nabla}{dS_{2n-2}} + k_1\nabla.$$

Actuellement, si les équations $f(x)=0$, $\varphi(x)=0$ ont en commun la seule racine x_1, il en résulte $\nabla=0$, et l'équation précédente divisée par $\varphi(x_2)\ \varphi(x_3)\ldots\ \varphi(x_n)$ devient

$$\varphi(x_2)\ \varphi(x_3)\ldots\ \varphi(x_n) = f'(x_1)\frac{d\nabla}{dS_{2n-1}},$$

résultat au moins singulier si l'on fait attention que $\frac{d\nabla}{dS_{2n-2}}$ est fonction des seuls coefficients. Il est bon de remarquer que cette dernière relation ne subsiste plus si les équations ont quelque autre racine commune, parce qu'il devient alors impossible d'effectuer la division par $\varphi(x_2)\ \varphi(x_3)\ldots\ \varphi(x_n)$.

Les produits analogues à $\varphi(x_2)\ \varphi(x_3)\ldots\ \varphi(x_n)$ peuvent s'obtenir plus généralement de la manière suivante. Ayant fait

$$R_1 = \varphi(x_2)\ \varphi(x_3)\ldots\ \varphi(x_n),\quad R_2 = \varphi(x_1)\ \varphi(x_3)\ldots\ \varphi(x_n),\quad \text{etc.},$$

et supposant que les équations $f(x)=0$, $\varphi(x)=0$ admettent la seule racine commune x_1, le résultat de l'élimination de x entre ces deux équations s'obtiendra en posant

$$\nabla = \varphi(x_1)\ \varphi(x_2)\ldots\ \varphi(x_n) = 0.$$

Or ∇ étant une fonction des coefficients $a_0, a_1,\ldots, b_0, b_1,\ldots$, on aura

$$\frac{d\nabla}{da_r} = \varphi'(x_1)\frac{dx_1}{da_r}R_1 + \varphi'(x_2)\frac{dx_2}{da_r}R_2 + \ldots + \varphi'(x_n)\frac{dx_n}{da_r}R_n;$$

mais

$$\frac{dx_s}{da_r} = -\frac{1}{f'(x_s)}x_s^{n-r};$$

donc

$$\frac{d\nabla}{da_r} = \frac{\varphi'(x_1)}{f'(x_1)} x_1^{n-r} R_1 + \frac{\varphi'(x_2)}{f'(x_2)} x_2^{n-r} R_2 + \ldots + \frac{\varphi'(x_n)}{f'(x_n)} x_n^{n-r} R_n.$$

Maintenant, par la méthode d'Abel (*voyez* SERRET, p. 59, *Algèbre supérieure*, 2e édition), on a

$$\psi(x_1) = \frac{\Sigma R\,\theta(x)\,\psi(x)}{\Sigma R\,\theta(x)},$$

ψ et θ désignant des fonctions rationnelles et le Σ se rapportant aux racines de $f(x) = 0$. Si l'on prend

$$\psi(x) = c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + \ldots + c_n \quad \text{et} \quad \theta(x) = \frac{\varphi'(x)}{f'(x)},$$

ou aura évidemment

$$\Sigma R\,\theta(x)\,\psi(x) = -\left(c_0 \frac{d\nabla}{da_n} + c_1 \frac{d\nabla}{da_{n-1}} + \ldots + c_n \frac{d\nabla}{da_0}\right),$$

$$\Sigma R\,\theta(x) = -\frac{d\nabla}{da_0},$$

et conséquemment

$$\psi(x_1) = \frac{1}{\frac{d\nabla}{da_0}} \left(c_0 \frac{d\nabla}{da_n} + c_1 \frac{d\nabla}{da_{n-1}} + \ldots + c_n \frac{d\nabla}{da_0}\right),$$

ce qui constitue une forme nouvelle propre à représenter une fonction rationnelle de la racine commune à deux équations. On en déduit sur-le-champ

$$x_1^n : x_1^{n-1} : \ldots : x_1 : 1 = \frac{d\nabla}{da_n} : \frac{d\nabla}{da_{n-1}} : \ldots : \frac{d\Delta}{da_1} : \frac{d\Delta}{da_0},$$

résultat obtenu par M. Richelot (voir *Nouvelles Annales*, octobre 1854) par une autre méthode, et qui conduirait réciproquement à la formule qui vient de le fournir.

Supposons présentement

$$\psi(x_x) = \frac{f(x)}{x - x_1},$$

et posons

$$\sigma_r = \frac{x_2^r\,\varphi(x_2)}{\psi'(x_2)} + \frac{x_3^r\,\varphi(x_3)}{\psi'(x_3)} + \ldots + \frac{x_n^r\,\varphi(x_n)}{\psi'(x_n)}.$$

On verra, comme lorsqu'il s'est agi de l'expression (α) de ∇, que

$$R_1 = \begin{vmatrix} \sigma_0 & \sigma_1 \ldots & \sigma_{n-2} \\ \sigma_1 & \sigma_2 \;\ldots & \sigma_{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \sigma_{n-2} & \sigma_{n-1} \ldots & \sigma_{2n-4} \end{vmatrix}$$

Mais de $\psi(x) = \dfrac{f(x)}{x - x_1}$ on déduit

$$\psi'(x) = \frac{f'(x)}{x - x_1} - \frac{f(x)}{(x - x_1)^2},$$

et, par suite, pour $r = 2, 3, \ldots, n$,

$$\psi'(x_r) = \frac{f'(x_r)}{x_r - x_1}.$$

On aura donc, par la substitution,

$$\sigma_r = (x_2 - x_1)\frac{x_2^r\,\varphi(x_2)}{f'(x_2)} + (x_3 - x_1)\frac{x_3^r\,\varphi(x_3)}{f'(x_3)} + \ldots$$
$$+ (x_n - x_1)\frac{x_n^r\,\varphi(x_n)}{f'(x_n)},$$

et, par conséquent,

$$\sigma_r = S_{r+1} - x_1\,S_r.$$

Par cette relation il viendra

$$R_1 = \begin{vmatrix} S_1 - x_1\,S_0 & S_2 - x_1\,S_1 \ldots & S_{n-1} - x_1\,S_{n-2} \\ S_2 - x_1\,S_1 & S_3 - x_1\,S_2 \ldots & S_n - x_1\,S_{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ S_{n-1} - x_1\,S_{n-2} & S_n - x_1\,S_{n-1} \ldots & S_{2n-3} - x_1\,S_{2n-4} \end{vmatrix}$$

ou bien

$$R_1 = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 \ldots & S_{n-1} \\ S_1 & S_2 \ldots & S_n \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ S_{n-2} & S_{n-1} \ldots & S_{2n-3} \\ 1 & x_1 \ldots & x_1^{n-1} \end{vmatrix}$$

On obtiendrait les R_2, R_3 en écrivant x_2, $x_3 \ldots$ à la place de x_1. On apercevra par ce qui va suivre la relation très-simple qui règne entre les R_r et les dénominateurs des réduites de la fraction continue propre à représenter $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$.

2°. Si l'on pose

$$(7) \quad \frac{x_1^r \varphi(x_1)}{(x-x_1)f'(x_1)} + \frac{x_2^r \varphi(x_2)}{(x-x_2)f'(x_2)} + \ldots + \frac{x_n^r \varphi(x_n)}{(x-x_n)f'(x_n)} = T_r,$$

ce qui entraîne

$$T_0 = \frac{\varphi(x)}{f(x)},$$

on a le

Théorème II. — L'expression

$$(8) \qquad a_0 T_r + a_1 T_{r-1} + a_2 T_{r-2} + \ldots + a_r T_0$$

est égale à

$$T_0 (a_0 x^r + a_1 x^{r-1} + \ldots + a_{r-1} x + a_r) - (b_{1-e} x^{r-1} + b_{2-e} x^{r-2} + \ldots + b_{r-e}),$$

en ayant soin de mettre zéro à la place des coefficients b dont les indices seraient négatifs.

On aperçoit sans peine que ce théorème est une conséquence du théorème I, qui montre que

$$T_r = x T_{r-1} - S_{r-1},$$

et, par suite,

$$(9) \quad T_r = T_0 x^r - (x^{r-1} S_0 + x^{r-2} S_1 + \ldots + x S_{r-2} + S_{r-1}).$$

3°. Supposons que la recherche du plus grand commun diviseur de $f(x)$ et $\varphi(x)$, effectuée en changeant le signe du dividende et celui du diviseur dans chaque division partielle (comme cela se se pratique dans le théorème de M. Sturm), conduise aux relations

$$(10)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{f}{\varphi} = q_1 - \dfrac{r_1}{\varphi},\quad \dfrac{\varphi}{r_1} = q_2 - \dfrac{r_2}{r_1},\ldots, \\ \dfrac{r_{m-2}}{r_{m-1}} = q_m - \dfrac{r_m}{r_{m-1}},\quad \dfrac{r_{m-1}}{r_m} = q_{m+1}, \end{array}\right.$$

les $q_1, q_2, \ldots, q_{m+1}$ désignent les quotients obtenus dans les divisions successives, le premier étant en général du degré $n-m$ et les autres linéaires; et les $r_1, r_2, \ldots, r_m$ sont les restes correspondants dont les degrés respectifs sont généralement $m-1$, $m-2, \ldots, 1, 0$. Si l'on représente par

$$\frac{N_1}{D_1}, \quad \frac{N_2}{D_2}, \ldots, \quad \frac{N_{m+1}}{D_{m+1}} = \frac{\varphi(x)}{f(x)},$$

les réduites successives de la fraction continue

$$\cfrac{1}{q_1 - \cfrac{1}{q_2 - \cfrac{1}{q_3 - \ldots - \cfrac{1}{q_{m+1}}}}},$$

on aura

$$(11)\quad r_1 = \varphi D_1 - f N_1,\quad r_2 = \varphi D_2 - f N_2, \ldots,\quad r_m = \varphi D_m - f N_m$$

et les D_s, N_s seront du degré $n-m+s-1$ et $s-1$.

Cela posé, nous nous proposons le problème suivant :

Déterminer, en fonction des coefficients de $f(x)$ et $\varphi(x)$, les coefficients des résidus r, ceux des quotients q et ceux des numérateurs et dénominateurs N, D.

D'après les formules de la décomposition des fractions

on a

$$\Sigma_r \frac{r_s(x_r)}{f'(x_r)} = 0, \quad E_r \left[x_r \frac{r_s(x_r)}{f'(x_r)} \right] = 0, \ldots,$$

$$\Sigma_r \left[x_r^{s+e-1} \frac{r_s(x_r)}{f'(x_r)} \right] = \frac{A_s}{a_0},$$

A_s désignant le coefficient de x^{m-s} dans le polynôme $r_s(x)$, et comme les équations (11) donnent

$$r_s(x_r) = \varphi(x_r)\, D_s(x_r),$$

il vient

$$\Sigma_r \left[D_s(x_r) \frac{\varphi(x_r)}{f'(x_r)} \right] = 0, \quad \Sigma_r \left[x_r D_s(x_r) \frac{\varphi(x_r)}{f'(x_r)} \right] = 0, \ldots,$$

$$\Sigma_r \left[x_r^{s+e-1} D_s(x_r) \frac{\varphi(x_r)}{f'(x_r)} \right] = \frac{A_s}{a_0}.$$

En supposant

$$D_s(x) = c_s x^{e+s-1} + c'_s x^{e+s-2} + \ldots + c_s^{(i-2)} x + c_s^{(i-1)}$$

(où $i = s + e$), et substituant dans les équations précédentes, on aura un nombre d'équations précisément égal au nombre des coefficients c_s, $c'_s, \ldots$, et où ces dernières quantités auront elles-mêmes pour coefficients les S_p définis par l'équation (1). De ce système linéaire, on pourra donc déduire les expressions des c_s, $c'_s, \ldots$; et si l'on fait

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 \ldots & S_{i-1} \\ S_1 & S_2 \ldots & S_i \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ S_{i-1} & S_i \ldots & S_{2i-2} \end{vmatrix}$$

où $i = s + e = s + m - n$, on aura

$$c_s = \frac{A_s}{a_0 \Delta_i} \frac{d\Delta_i}{dS_{2i-2}}, \quad c'_s = \frac{A_s}{a_0 \Delta_i} \frac{d\Delta_i}{dS_{2i-3}}, \ldots, \quad c_s^{(i-1)} = \frac{A_s}{a_0 \Delta_i} \frac{d\Delta_i}{dS_{i-}}.$$

Par conséquent,

$$(12_1)\quad \begin{cases} D_s(x) = \dfrac{A_s}{a_0 \Delta_i}\left(\dfrac{d\Delta_i}{dS_{2i-2}}x^{i-1} + \dfrac{d\Delta_i}{dS_{2i-3}}x^{i-2} + \ldots \right. \\ \qquad\qquad\qquad \left. + \dfrac{d\Delta_i}{dS_i}x + \dfrac{d\Delta_i}{dS_{i-1}}\right): \end{cases}$$

ce qu'on peut encore écrire

$$(12)\qquad D_s(x) = \frac{A_s}{a_0 \Delta_i}\begin{vmatrix} S_0 & S_1 & \ldots & S_{i-1} \\ S_1 & S_2 & \ldots & S_i \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ S_{i-2} & S_{i-1} & \ldots & S_{2i-3} \\ 1 & x & \ldots & x_{i-1} \end{vmatrix}$$

D'ailleurs des relations (11), savoir

$$r_s = \varphi D_s - f N_s,$$
$$r_{s-1} = \varphi D_{s-1} - f N_{s-1},$$

combinées avec $N_s D_{s-1} - N_{s-1} D_s = 1$, on déduit

$$f = r_{s-1} D_s - r_s D_{s-1},$$
$$\varphi = N_s D_{s-1} - N_{s-1} D_s,$$

et en substituant dans ces équations les valeurs

$$r_s = A_s x^{m-s} + \ldots,$$
$$D_s = c_s x^{n-m+s-1} + \ldots,$$

on en conclut sur-le-champ

$$A_{s-1} c_s = a_0,$$

c'est-à-dire, en ayant égard à la valeur de c_s et observant que $\dfrac{d\Delta_i}{dS_{2i-2}} = \Delta_{i-1}$,

$$(12')\qquad A_s A_{s-1} = a_0^2 \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i};$$

en outre, on a évidemment $A_0 = b_0$.

Au moyen des formules (2), (6) on passera de ces expressions qui sont formées avec les S_r aux expressions analogues formées avec les coefficients des fonctions $f(x)$, $\varphi(x)$.

La théorie de la décomposition des fractions rationnelles donne

$$\frac{r_s(x)}{f(x)} = \Sigma_r \left(\frac{r_s(x_r)}{(x - x_r) f'(x_r)}\right) = \Sigma_r \left(\frac{D_s(x_r)\varphi(x_r)}{(x - x_r) f'(x_r)}\right),$$

ce qui, en ayant égard à l'équation (12_1) et à l'expression (7) de T_r, se transforme aisément en

$$(13) \qquad \frac{r_s(x)}{f(x)} = \frac{A_s}{a_0 \Delta_i} \begin{vmatrix} S_0 & S_1 \dots & S_{i-1} \\ S_1 & S_2 \dots & S_i \\ \dots & \dots & \dots \\ S_{i-2} & S_{i-1} \dots & S_{2i-3} \\ T_0 & T_1 \dots & T_{i-1} \end{vmatrix}$$

De là, par les formules (2), (6) et (8), on déduira les coefficients $r_s(x)$ exprimés par ceux de $f(x)$, $\varphi(x)$.

D'après l'équation (9), si l'on fait

$$x^{r-1} S_0 + x^{r-2} S_1 + \dots + x S_{r-2} + S_{r-1} = f_{r-1},$$

en sorte que

$$T_r = T_0 x^r - f_{r-1},$$

le déterminant qui figure dans le second membre de l'équation précédente se partagera dans les deux suivants :

$$\begin{vmatrix} S_0 & S_1 \dots & S_{i-1} \\ S_1 & S_2 \dots & S_i \\ \dots & \dots & \dots \\ S_{i-2} & S_{i-1} \dots & S_{2i-3} \\ T_0 & T_0 x \dots & T_0 x^{i-1} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} S_0 & S_1 \dots & S_{i-1} \\ S_1 & S_2 \dots & S_i \\ \dots & \dots & \dots \\ S_{i-2} & S_{i-1} \dots & S_{2i-3} \\ 0 & f_0 \dots & f_{i-2} \end{vmatrix}$$

Donc, en se rappelant que $T_0 = \frac{\varphi(x)}{f(x)}$, et ayant égard à l'équation (12), on aura

$$r_s(x) = \varphi(x) D_s(x) - \frac{A_s}{a_0 \Delta_i} f(x) \begin{vmatrix} S_0 & S_1 \ldots\ldots & S_{i-1} \\ S_1 & S_2 \ldots\ldots & S_i \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ S_{i-2} & S_{i-1} \ldots & S_{2i-3} \\ 0 & f_0 \ldots\ldots & f_{i-2} \end{vmatrix}$$

et, par conséquent,

$$N_s(x) = \frac{A_s}{a_0 \Delta_i} \begin{vmatrix} S_0 & S_1 \ldots\ldots & S_{i-1} \\ S_1 & S_2 \ldots\ldots & S_i \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ S_{i-2} & S_{i-1} \ldots & S_{2i-3} \\ 0 & f_0 \ldots\ldots & f_{i-2} \end{vmatrix}$$

il n'y aura plus qu'à introduire les S_r exprimés par les coefficients de $f(x)$, $\varphi(x)$, pour avoir l'expression requise des N_s.

Quant à la valeur d'un quotient quelconque q_s, on pourra la déduire indifféremment de l'une des relations connues

$$D_{s-1} q_s = D_s + D_{s-2},$$

$$N_{s-1} q_s = N_s + N_{s-2},$$

$$r_{s-1} q_s = r_s + r_{s-2}.$$

On remarquera que la quantité que nous avons précédemment appelée $R_{(r)}$ n'est autre chose que $D_m(x_r)$.

4°. En différentiant les équations (10) par rapport à x, on obtient, après quelques reductions,

$$f'(x)\varphi - \varphi'(x) f = \varphi^2 \frac{dq_1}{dx} + r_1^2 \frac{dq_2}{dx} + r_1^2 \frac{dq_3}{dx} + \ldots + r_m^2 \frac{dq_{m+1}}{dx},$$

ou, en supposant

$$q_2 = \alpha_2 x + \beta_2, \quad q_3 = \alpha_3 x + \beta_3, \ldots, \quad q_{m+1} = \alpha_{m+1} x + \beta_{m+1};$$

$$f'(x)\varphi - \varphi'(x) f = \varphi^2 \frac{dq_1}{dx} + \alpha_2 r_1^2 + \alpha_3 r_2^2 + \ldots + \alpha_{m+1} r_m^2.$$

En désignant par x', x'',..., $x^{(m)}$ les racines de l'équation $\varphi(x) = 0$, on déduit de la précédente

$$f'(x_r)\varphi(x_r) = \varphi^2(x_r).q'_1(x_r) + \alpha_2 r_1^2(x_r) + \ldots + \alpha_{m+1} r_m^2,$$
$$-\varphi'(x^{(r)}) f(x^{(r)}) = \alpha_3 r_1^2(x^{(r)}) + \alpha_3 r_2^2(x^{(r)}) + \ldots + \alpha_{m+1} r_m^2,$$

et celles-ci, quand on a égard à (11), fournissent

$$\frac{f'(x_r)}{\varphi(x_r)} = q'_1(x_r) + \alpha_2 D_1^2(x_r) + \alpha_3 D_2^2(x_r) + \ldots + \alpha_{m+1} D_m^2(x_r)$$
$$-\frac{\varphi'(x^{(r)})}{f(x^{(r)})} = \alpha_2 N_1^2(x^{(r)}) + \alpha_3 N_2^2(x^{(r)}) + \ldots + \alpha_{m+1} N_m^2(x^{(r)}).$$

Si l'on suppose

$$m = n - 1,$$

et, par conséquent,

$$q_1 = \alpha_1 x + \beta_1,$$

la première de ces équations donne

$$(14) \qquad \begin{vmatrix} p(x_1) & p(x_2)\ldots\ldots & p(x_n) \\ D_1^2(x_1) & D_1^2(x_2)\ldots\ldots & D_1^2(x_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ D_{n-1}^2(x_1) & D_{n-1}^2(x_2)\ldots & D_{n-1}^2(x_n) \end{vmatrix} = 0,$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$p(x_r) = \alpha_1 - \frac{f'(x_r)}{\varphi(x_r)}.$$

Dans le cas particulier où

$$\varphi(x) = f'(x),$$

la première ligne du déterminant qui précède devient divi-

sible par $\alpha_1 - 1$, et l'on a

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \ldots\ldots\ldots & 1 \\ D_1^2(x_1) & D_1^2(x_2)\ldots\ldots & D_1^2(x_n) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ D_{n-1}^2(x_1) & D_{n-1}^2(x_2)\ldots & D_{n-1}^2(x_n) \end{vmatrix} = 0,$$

propriété déjà énoncée par M. Sylvester (*Philosophical Magazine*, octobre 1853). L'équation (14) vérifie la conjecture de ce géomètre distingué relativement à l'existence d'une équation analogue à cette dernière dans le cas général où $\varphi(x)$ serait une fonction quelconque du degré $(n-1)$ (*).

5°. En désignant par A_s, A'_s les coefficients de x^{m-s}, x^{m-s-1} dans le polynôme $r_s(x)$, et par c_s, c'_s ceux de $x^{n-m+s-1}$, $x^{n-m+s-2}$ dans le polynôme $D_s(x)$, et se rappelant que

$$q_{s+1}(x) = \alpha_{s+1}x + \beta_{s+1},$$

on a

$$\alpha_{s+1} = \frac{c_{s+1}}{c_s}, \quad \beta_{s+1} = \frac{c_s c'_{s+1} - c_{s+1} c'_s}{c_s^2}.$$

Maintenant les formules pour la décomposition des fractions rationnelles donnent

$$\Sigma_r \left[D_s(x_r) \frac{r_s(x_r)}{f'(x_r)} \right] = \frac{A_s c_s}{a_0},$$

$$\Sigma_r \left[x_r D_s(x_r) \frac{r_s(x_r)}{f'(x_r)} \right] = \frac{A_s c'_s + A'_s c_s}{a_0} - \frac{A_s c_s a_1}{a_0},$$

et, par suite,

$$\Sigma_r \left[D_s(x_r) \frac{r_r(x_r)}{f'(x_r)} (x - x_r) \right] = \frac{A_s c_s}{a_0} (x - \frac{A_s c'_s + A'_s c_s}{a_0} + \frac{A_s c_s a_1}{a_0^2};$$

(*) *On a theory of the syzigetic relations of two rational integral functions, etc.* (*Philosophical Transactions*, 1853, part III, page 480.)

mais

$$a_0 = A_s c_{s+1}, \qquad a_1 = A_s c'_s c_{s+1} + A'_s c_{s+1};$$

donc

$$\Sigma_r \left[D_s(x_1) \frac{r_s(x_r)}{f'(x_r)} (x - x_r) \right] = \frac{A_s^2}{A_{s-1}^2} q_{s+1}(x).$$

On trouve aussi

$$\Sigma_r \left[D_s^2(x) \frac{\varphi(x_r)}{f'(x_r)} (x - x_r) \right] = \frac{A_s^2}{A_{s-1}^2} q_{s+1}(x),$$

$$\Sigma_r \left[N_s^2(x^{(r)}) \frac{f(x^{(r)})}{\varphi'(x^{(r)})} (x - x^{(r)}) \right] = - \frac{A_s^2}{A_{s-2}^2} q_{s+1}(x),$$

formules données sans démonstration par M. Sylvester dans le Mémoire cité (*On a theory, etc.*). On peut joindre à ces relations les suivantes, qu'on vérifiera sans peine au moyen des principes ci-dessus exposés.

$$\Sigma_r \left[D_s(x_r) N_s(x_r) \frac{\varphi(x_r)}{f'(x_r)} \right] = 0,$$

$$\Sigma_r \left[D_s(x_r) D_{s-1}(x_r) \frac{\varphi(x_r)}{f'(x_r)} \right] = 0,$$

$$\Sigma_r \left[D_s^2(x_r) q_{s+1}(x_r) \frac{\varphi(x_r)}{f'(x_r)} \right] = 0.$$

6°. Le déterminant qui figure dans le second membre de l'équation (13) peut, quand on a égard à l'équation

$$S_{i-1} - x T_{i-1} = - T_i,$$

se transformer dans le suivant :

$$\begin{vmatrix} T_0 & T_1 \ldots & T_{i-1} \\ T_1 & T_2 \ldots & T_i \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ T_{i-1} & T_i \ldots & T_{2i-2} \end{vmatrix}$$

et conséquemment, en posant

$$F = \Sigma_r \left[\frac{\varphi(x_r)}{(x - x_r) f'(x_r)} (y_0 + x_r y_1 + x_r^2 y_2 + \ldots + x_r^{i-1} y_{i-1})^2 \right],$$

ce même déterminant ne sera autre chose que le discriminant de la fonction quadratique F. Dans le cas de $\varphi(x) = f'(x)$, ce théorème avait déjà été énoncé par M. Hermite dans son intéressant Mémoire : *Remarques sur le théorème de M. Sturm,* présenté à l'Académie française le 14 février 1853.

Les valeurs des résidus exprimées au moyen des racines de $f(x) = 0$ peuvent aisément s'obtenir en considérant les mêmes résidus sous cette dernière forme. Ainsi, par exemple,

$$\begin{vmatrix} T_0 & T_1 \\ T_1 & T_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Sigma_s \dfrac{\varphi(x_s)}{(x - x_s) f'(x_s)} & \Sigma_r \dfrac{x_r \varphi(x_r)}{(x - x_r) f'(x_r)} \\ \Sigma_s \dfrac{x_s \varphi(x_s)}{(x - x_s) f'(x_s)} & \Sigma_r \dfrac{x_r^2 \varphi(x_r)}{(x - x_r) f'(x_r)} \end{vmatrix}$$

ou bien

$$\begin{vmatrix} T_0 & T_1 \\ T_1 & T_2 \end{vmatrix} = \Sigma_s \Sigma_r \frac{\varphi(x_r) \varphi(x_s)}{f'(x_r) f'(x_s)} \frac{1}{(x - x_r)(x - x_s)} \begin{vmatrix} 1 & x_r \\ x_s & x_r^2 \end{vmatrix}$$

ou encore

$$\begin{vmatrix} T_0 & T_1 \\ T_1 & T_2 \end{vmatrix} = S \left| \frac{\varphi(x_s) \varphi(x_r)}{f'(x_s) f'(x_r)} \frac{(x_s - x_r)^2}{(x - x_s)(x - x_r)} \right|$$

Semblablement

$$\begin{vmatrix} T_0 & T_1 & T_2 \\ T_1 & T_2 & T_3 \\ T_2 & T_3 & T_4 \end{vmatrix} = S \frac{\varphi(x_s) \varphi(x_r) \varphi(x_i)}{f'(x_s) f'(x_r) f'(x_i)} \frac{(x_s - x_r)^2 (x_r - x_i)^2 (x_i - x_s)^2}{(x - x_s)(x - x_r)(x - x_i)},$$

et ainsi de suite. Le symbole S représente la somme d'autant de produits, analogues à celui qui est en évidence, qu'il

y a de combinaisons deux à deux, trois à trois, etc., des racines.

7°. Nous ajouterons les valeurs des résidus $r_1(x)$, $r_2(x)$, $r_3(x)$, exprimés par les coefficients des fonctions $f(x)$, $\varphi(x)$; on pourra en déduire aisément la loi de formation pour un résidu quelconque. Les expressions qui suivent sont obtenues par la méthode employée dans la recherche analogue des résidus de Sturm. En supposant $m=n-1$, on a

$$r_1(x)=\frac{A_1}{a_0^3\,\Delta_2}\begin{vmatrix} b_0 & b_1 \\ p_0 & p_1 \end{vmatrix},\quad r_2(x)=\frac{A_2}{A_0^5\,\Delta_3}\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & p_0 & p_1 & p_2 \end{vmatrix},$$

$$r_3(x)=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ 0 & 0 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{vmatrix}.$$

où

$$p_0=a_0\,\varphi(x),\quad p_1=(a_0x+a_1)\,\varphi(x)-b_0f(x),$$
$$p_2=(a_0x^2+a_1x+a_2)\,\varphi(x)-(b_0x+b_1)f(x),$$
$$p_3=(a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3)\,\varphi(x)-(b_0x^2+b_1x+b_2)f(x).$$

Des équations (12′) on déduirait en outre, pour s pair,

$$A_s=\frac{b_0^2}{a_0}\,\frac{\Delta_3^2\,\Delta_5^2\ldots\,\Delta_{s-1}^2}{\Delta_1^2\,\Delta_4^2\ldots\,\Delta_s^2}\,\Delta_{s+1},$$

et pour s impair,

$$A_s=\frac{a_0^3}{b_0^2}\,\frac{\Delta_2^2\,\Delta_4^2\ldots\,\Delta_{s-1}^2}{\Delta_3^2\,\Delta_5^2\ldots\,\Delta_s^2}\,\Delta_{s+1}.$$

Quant aux Δ, on les calculerait comme les résidus, et l'on

trouverait

$$\Delta_2 = \frac{1}{a_0^3}\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & b_0 & b_1 \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \frac{1}{a_0^5}\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix} \cdots\cdot$$

Des valeurs de $r(x)$ on déduit celles de $D(x)$, $N(x)$, exprimées déjà au moyen des coefficients des fonctions de $\varphi(x)$, $f(x)$, et cela par la forme même du déterminant second membre de la valeur de $r(x)$, ainsi qu'on l'a indiqué à la fin de 3°.

Les expressions trouvées pour $r(x)$ et Δ restent encore les mêmes dans le cas où $m < n - 1$; il faut seulement avoir soin de remplacer par des zéros certains coefficients convenables des fonctions $\varphi(x)$, $f(x)$.

Pavie, 10 août 1854.

Remarque du Traducteur. — La formule (3) est démontrée par M. Brioschi, probablement de la manière suivante, dans le volume de l'année 1854 des *Annales* de M. Tortolini, volume que je n'ai pas sous les yeux, la Note qu'on vient de lire provenant d'un tirage à part :

$\frac{a_{r+1}}{a_0}$ étant la somme des produits $r+1$ à $r+1$ des racines de $f(x)=0$, on peut considérer cette somme comme obtenue en multipliant par x_s la somme des produits r à r de toutes les autres racines et joignant à cela la somme des produits $r+1$ à $r+1$ des mêmes autres racines. La différentiation par x_s fera donc disparaître cette seconde partie de façon que $\frac{da_{r+1}}{a_0\,dx_s}$, se trouvant ainsi égal à la somme des produits r à r de toutes les racines autres que x_s, ne sera autre

chose que le coefficient de x^{n-r-1} dans le quotient $\frac{f(x)}{a_0(x-x_s)}$: ce qui démontre la formule (3). On aurait semblablement

$\frac{d^2 . a_{r+1}}{dx_s\, dx_u}$ = le coefficient de x^{n-r-2} dans $\frac{f(x)}{(x-x_s)(x-x_u)}$,

et ainsi de suite.

Si $f(x)=0$ n'a pas de racines égales, comme on l'a supposé, il est clair que $\frac{d^2\, a_{r+1}}{dx_s^2}=0$. On pourrait d'ailleurs former les expressions des dérivées partielles pour le cas des racines égales.

Soit φ une fonction quelconque des racines de l'équation $f(x)=0$; on a

$$\frac{d\varphi}{dx_s}=\sum_{r=1}^{r=n}\frac{d\varphi}{da_r}\frac{da_r}{dx_s},$$

et, par suite,

$$\sum_{s=1}^{s=n} x_s\frac{d\varphi}{dx_s}=\sum_{r=1}^{r=n}\frac{d\varphi}{da_r}\sum_{s=1}^{s=n} x_s\frac{da_r}{dx_s}$$

$$=-\sum_{r=1}^{r=n}\frac{d\varphi}{da_r}\sum_{s=1}^{s=n}(a_0 x_s^r + a_1 x_s^{r-1} + \ldots + a_{r-1} x_s),$$

c'est-à-dire, en représentant par s_r la somme des puissances r des racines,

$$\sum_{s=1}^{s=n} x_s\frac{d\varphi}{dx_s}=-\sum_{r=1}^{r=n}\frac{d\varphi}{da_r}(a_0 s_r + a_1 s_{r-1} + \ldots + a_{r-1} s_1);$$

supposant, pour plus de simplicité, $a_0=1$, et observant que ce qui est entre parenthèses est égal, par les formules

de Newton, à $-ra_r$, on aura finalement

$$\sum_{s=1}^{s=n} x_s \frac{d\varphi}{dx_s} = \sum_{r=1}^{r=n} . ra_r \frac{d\varphi}{da_r}.$$

Cette formule est encore démontrée par M. Brioschi dans le volume cité.

On trouve aussi de la même manière

$$\sum_{s=1}^{s=n} \frac{d\varphi}{dx_s} = \sum_{r=1}^{r=n} \frac{d\varphi}{da_r} \sum_{s=1}^{s=n} (x_s^{r-1} + a_1 x_s^{r-2} + \ldots + a_{r-2} x_s + a_{r-1})$$

$$= -\sum_{r=1}^{r=n} \frac{d\varphi}{da_r} (s^{r-1} + a_1 s^{r-2} + \ldots + a_{r-2} s_1 + na_{r-1}),$$

ou, à cause de $s_{r-1} + a_1 s_{r-2} + \ldots + a_{r-2} s_1 + (r-1) a_{r-1} = 0$,

$$\Sigma_s \frac{d\varphi}{dx_s} = -\Sigma_r (n - r + 1) a_{r-1} \frac{d\varphi}{da_r},$$

nouveau résultat de M. Brioschi (même volume).

THÉORÈME D'ALGÈBRE SUPÉRIEURE;

PAR M. FAURE.

(*Nouvelles Annales*, Mars 1855.)

Si l'on divise le polynôme

$$\Pi(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_r x^{m-r} + \ldots$$

par le polynôme

$$F(x) = \alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \alpha_2 x^{n-2} + \ldots,$$

et que l'on représente le quotient par

$$A_0 x^{m-n} + A_1 x^{m-n-1} + A_2 x^{m-n-2} + \ldots + A_r x^{m-n-r} + \ldots,$$

on trouve aisément qu'un terme quelconque du quotient tel que A_r a pour valeur

$$A_r = \frac{1}{(\alpha_0)^{r+1}} \begin{vmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_0 \\ \alpha_1 & \alpha_0 & 0 & 0 & \ldots & a_1 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 & 0 & \ldots & a_2 \\ \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 & \ldots & a_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_r & \alpha_{r-1} & \alpha_{r-2} & \alpha_{r-3} & \ldots & a_r \end{vmatrix}.$$

C'est ce principe bien simple qui, développé, mène à de nombreuses conséquences; ainsi, relativement aux fonctions symétriques, on sait que si l'on veut avoir la somme des valeurs que prend une fonction entière $\varphi(x)$ dans laquelle on remplace x successivement par toutes les racines d'une équation $F(x) = 0$, il faut effectuer la division $\frac{F'(x)\varphi(x)}{F(x)}$, et la somme que l'on demande est le coefficient du terme en $\frac{1}{x}$ du quotient.

Supposons que $\Pi(x) = F'(x)\varphi(x)$ et que $\varphi(x)$ soit de degré r; le terme $A_r x^{m-n-r}$ pour lequel $m-n-r=-1$ donnera A_r pour la fonction symétrique cherchée.

Si l'on a égard au procédé indiqué par M. Transon, on voit que la méthode précédente conduit à la détermination d'une fonction symétrique quelconque, et l'on substitue ainsi des multiplications aux divisions de M. Transon.

En particulier si l'on suppose $\varphi(x) = 1$, le quotient $\frac{F'(x)}{F(x)}$ donnera la somme des puissances des racines de $F(x) = 0$. La valeur de A_r, en observant que $a_0 = m\alpha_0$,

$a_1 = (m-1)\alpha_1, \ldots$, devient dans ce cas

$$A_r = \frac{1}{(\alpha_0)^{r+1}} \begin{vmatrix} \alpha_0 & 0 & \ldots & m\alpha_0 \\ \alpha_1 & \alpha_0 & \ldots & (m-1)\alpha_1 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \ldots & (m-2)\alpha_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_r & \alpha_{r-1} & \ldots & (m-r)\alpha_r \end{vmatrix}$$

d'où

$$A_r(-\alpha_0)^{r+1} = \begin{vmatrix} 0 & \alpha_0 & 0 & \ldots & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_0 & \ldots & 0 \\ 2\alpha_2 & \alpha_2 & \alpha_1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r\alpha_r & \alpha_r & \alpha_{r-1} & \ldots & \alpha_1 \end{vmatrix}.$$

Cette relation revient à celle de Brioschi, il suppose seulement $a_0 = 1$. (Voir *Nouvelles Annales*, tome XIII, page 352.)

Relativement à la division numérique dans un système quelconque, on arrive à ceci : Supposez que l'on veuille diviser le nombre

$$5312367 \quad \text{par} \quad 23457$$

écrit, par exemple, dans le système décimal; le quotient sera de la forme

$$A_0\, 100 + A_1\, 10 + A_2.$$

Or, d'après la valeur générale de A_r,

$$A_0 = \frac{5}{2}, \quad A_1 = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -\frac{9}{4}, \quad A_2 = \frac{1}{8}\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{9}{8},$$

donc le quotient entier est

$$\frac{1}{8}(2000 - 180 - 9) = \frac{1811}{8} = 226.$$

On voit de plus que les seuls chiffres qui servent à déter-

miner le quotient sont 531 dans le dividende, 234 dans le diviseur, et généralement autant de chiffres qu'il doit y en avoir au quotient. Ainsi le quotient des deux nombres précédents revient à celui de 53100 par 234.

Il y a encore d'autres conséquences relatives à la valeur du reste de la division de deux polynômes, aux séries récurrentes, aux fonctions de M. Sturm, etc.

DÉTERMINATION

DES

RACINES COMMUNES A DEUX ÉQUATIONS.

(BRIOSCHI, *Nouvelles Annales*, Mars 1855.)

Soient

$$(1) \qquad \begin{cases} f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0, \\ \varphi(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m = 0 \end{cases}$$

les deux équations, x_1, $x_2, \ldots, x_n$ les racines de la première supposées inégales, et

$$(2) \qquad V = \varphi(x_1)\,\varphi(x_2)\ldots\varphi(x_n).$$

Supposons que les équations (1) aient r (et seulement r) racines communes, on a la proposition suivante :

Théorème. Les r racines communes aux deux équations (1) sont les racines de celle-ci :

$$\frac{d^r V}{db_m^r} x^r - r \frac{d^r V}{db_m^{r-1}\, db_{m-1}} x^{r-1} + \frac{r(r-1)}{2} \frac{d^r V}{db_m^{r-2}\, db_m^2} x^{r-2} - \ldots$$
$$- (-1)^r \frac{d^r V}{db_m\, db_{m-1}^{r-1}} x + (-1)^r \frac{d^r V}{db_{m-1}^r} = 0$$

ou de cette autre

$$\frac{d^r V}{da_n^r} x^r - r \frac{d^r V}{da_n^{r-1}\, da_{n-1}} x^{r-1} + \ldots$$

$$- (-1)^r r \frac{d^r V}{da_n\, da_{n-1}^{r-1}} + (-1)^r \frac{d^r V}{da_{n-1}^r} = 0.$$

En effet, de l'équation (2) on déduit

$$(3) \left\{ \begin{aligned} \frac{dV}{db_{s_1}} &= x_1^{r_1} V_1 + x_2^{r_2} V_2 + \ldots + x_n^{r_n} V_n, \\ \frac{d^2 V}{db_{s_1}\, db_{s_2}} &= (x_1^{r_1} x_2^{r_2} + x_1^{r_2} x_2^{r_1}) V_{1,2} + (x_1^{r_1} x_3^{r_2} + x_1^{r_2} x_3^{r_1}) V_{1,3} + \ldots \\ \frac{d^3 V}{db_{s_1}\, db_{s_2}\, db_{s_3}} &= \left[\begin{array}{l} x_3^{r_3}(x_1^{r_1} x_2^{r_2} + x_1^{r_2} x_2^{r_1}) + x_2^{r_3}(x_1^{r_1} x_3^{r_2} + x_1^{r_2} x_3^{r_1}) \\ + x_1^{r_3}(x_2^{r_1} x_3^{r_2} + x_2^{r_2} x_3^{r_1}) \end{array} \right] V_{1,2,3} + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

où

$$V_1 = \frac{V}{\varphi(x_1)}, \quad V_{1,2} = \frac{V_1}{\varphi(x_2)}, \quad V_{1,2,3} = \frac{V_{1,2}}{\varphi(x_3)}, \ldots,$$

$$r_1 = m - s_1, \quad r_2 = m - s_2, \ldots.$$

Si les équations (1) ont la seule racine commune x_1, la première équation (3) donne

$$\frac{dV}{db_{s_1}} - x_1^{r_1} V_1$$

et, par conséquent,

$$\frac{dV}{db_m} x_1 - \frac{dV}{db_{m-1}} = 0,$$

résultat obtenu par M. Richelot.

Si les équations (1) ont en commun les seules racines

x_1, x_2, la seconde des équations (3) donne

$$\frac{d^2V}{db_{s_1}\,db_{s_2}} = (x_1^{r_1}\,x_2^{r_2} + x_1^{r_2}\,x_2^{r_1})\,V_{1,2};$$

d'où

$$\frac{d^2V}{db_m^2} = 2\,V_{1,2},\quad \frac{d^2V}{db_m\,db_{m-1}} = (x_1 + x_2)\,V_{1,2},\quad \frac{d^2V}{db_{m-1}^2} = 2\,x_1 x_2 V_{1,2},$$

et les x_1, x_2 seront les racines de l'équation

$$\frac{d^2V}{db_m^2}\,x^2 - 2\,\frac{d^2V}{db_m\,db_{m-1}}\,x + \frac{d^2V}{db_{m-1}^2} = 0.$$

De même si les équations (1) n'admettent simultanément que les racines x_1, x_2, x_3, la troisième équation (3) fournit

$$\frac{d^3V}{db_m^3} = 6\,V_{1,2,3},\quad \frac{d^3V}{db_m^2\,db_{m-1}} = 2\,(x_1 + x_2 + x_3)\,V_{1,2,3},$$

$$\frac{d^3V}{db\,db_{m-1}^2} = 2\,(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3)\,V_{1,2,3},\quad \frac{d^3V}{db_{m-1}^3} = x_1 x_2 x_3\,V_{1,2,3},$$

et les trois racines communes seront en conséquence les racines de l'équation

$$\frac{d^3V}{db_m^3}\,x^3 - 3\,\frac{d^3V}{db_m^2\,db_{m-1}}\,x^2 + 3\,\frac{d^3V}{db_m\,db_{m-1}^2}\,x - \frac{d^3V}{db_{m-1}^3} = 0.$$

En se laissant guider par l'analogie, on pourrait conclure à la généralité du théorème; mais la méthode suivante, plus féconde en conséquences, ne laissera aucun doute à ce sujet.

Représentons par P_1 le symbole d'opération

$$x^s\,\frac{dV}{db_m} - s x^{s-1}\,\frac{dV}{db_{m-1}} + \frac{s(s-1)}{2}\,x^{s-2}\,\frac{dV}{db_{m-2}} - \ldots$$
$$- (-1)^s s x\,\frac{dV}{db_{m-s+1}} + (-1)^s\,\frac{dV}{db_{m-s}}.$$

En substituant pour $\frac{dV}{db_m}, \frac{dV}{db_{m-1}}, \ldots,$ leurs valeurs déduites de la première (3), on obtient

$$(a) \qquad P_1 = V_1 (x - x_1)^s + V_2 (x - x_2)^s + \ldots + V_n (x - x_n)^s.$$

Répétons sur la fonction V une seconde fois l'opération P_1, c'est-à-dire formons le carré du polynôme P_1 en changeant dans les dérivées les exposants en indices : on aura de la sorte

$$P_2 = x^{2s} \frac{d^2V}{db_m^2} - 2sx^{2s-1} \frac{d^2V}{db_m\, db_{m-1}}$$
$$+ x^{2s-2}\left(2\frac{s(s-1)}{1.2}\frac{d^2V}{db_m\, db_{m-2}} + s^2 \frac{d^2V}{db_{m-1}^2}\right)$$
$$- 2\frac{s(s-1)(s-2)}{1.2.3} x^{2s-3} \frac{d^2V}{db_m\, db_{m-3}} + \ldots$$

ou, en mettant pour $\frac{d^2V}{db_m^2}, \frac{d^2V}{db_m\, db_{m-1}}, \ldots$ leurs valeurs tirées de la seconde (3),

$$(b) \quad P_2 = 2V_{1,2}(x - x_1)^s (x - x_2)^s + 2V_{1,3}(x - x_1)^s (x - x_3)^s + \ldots$$

Si l'on fait subir à la fonction V une troisième fois l'opération P_1, c'est-à-dire si l'on forme le cube du polynôme P_1 en changeant dans les dérivées les exposants en indices, et qu'on ait égard à la troisième (3), on trouvera

$$(c) \quad \left\{ \begin{array}{l} P_3 = 6V_{1,2,3}(x - x_1)^s (x - x_2)^s (x - x_3)^s \\ \quad + 6V_{1,2,4}(x - x_1)^s (x - x_2)^s (x - x_4)_s + \ldots, \end{array} \right.$$

et généralement l'opération P_1, répétée r fois de suite, conduira à

$$(d) \quad P_r = 1.2.3\ldots r V_{1,2,3,\ldots,r}(x - x_1)^s (x - x_2)\ldots (x - x_r)^s + \ldots.$$

Actuellement, si les équations $f(x) = 0$, $\varphi(x) = 0$ ont une seule racine commune x_1, on a

$$V = 0, \quad P_1 = V_1 (x - x_1)^s;$$

si deux racines communes x_1, x_2,

$$V = 0, \quad P_1 = 0, \quad P_2 = 2V_{1,2}(x - x_1)^s (x - x_2)^s;$$

si trois racines communes x_1, x_2, x_3,

$$V = 0, \ P_1 = 0, \ P_2 = 0, \ P_3 = 6V_{1,2,3}(x - x_1)^s (x - x_2)^s (x - x_3)^s;$$

et généralement, pour r racines communes $x_1, x_2, \ldots, x_r$, on aura

$$V = 0, \quad P_1 = 0, \quad P_2 = 0, \ldots, \quad P_{r-1} = 0,$$
$$P_r = 1.2.3\ldots r \ V_{1,2,3\ldots r}(x - x_1)^s (x - x_2)^s \ldots (x - x_r)^s.$$

Donc, si, dans le symbole d'opération P_1, on fait $s = 1$, les équations du premier, second, ..., $r^{ième}$ degré

$$P_1 = 0, \quad P_2 = 0, \ldots, \ P_r = 0$$

auront pour racines respectivement la seule racine x_1 commune aux deux équations $f(x) = 0$, $\varphi(x) = 0$; les deux seules racines communes x_1, x_2, ...; les r seules racines communes $x_1, x_2, \ldots, x_r$.

Maintenant en faisant $s = 1$ dans l'expression de P_1, et répétant r fois cette même opération P_1, on obtient

$$P_r = \frac{d^r V}{db_m^r} x^r - r \frac{d^r V}{db_m^{r-1}\, db_{m-1}} x^{r-1} + \ldots$$
$$- (-1)^r r \frac{d^r V}{db_m\, db_{m-1}^{r-1}} x + (-1)^r \frac{d^r V}{db_{m-1}^r},$$

ce qui fournit la démonstration générale du théorème énoncé au commencement.

Supposons présentement que l'équation $f(x) = 0$ contienne i groupes de racines, pour le premier desquels le degré de multiplicité des racines soit r_1, pour le second $r_2, \ldots$, pour le $i^{ième}$, r_i; et soit fait $r_1 + r_2 + \ldots + r_i = r$. En désignant par V le discriminant de l'équation $f(x) = 0$,

et par P_1 le symbole d'opération

$$x^s \frac{dV}{da_n} - sx^{s-1} \frac{dV}{da_{n-1}} + \ldots - (-1)^s sx \frac{dV}{da_{n-s+1}} + (-1)^s \frac{dV}{da_{n-s}},$$

on aura

$$V = 0, \quad P_1 = 0, \quad P_2 = 0, \ldots, \quad P_{r-1} = 0,$$

$$P_r = \frac{d^r V}{da_n^r} [(x - x_1)^{r_1} (x - x_2)^{r_2} \ldots (x - x_n)^{r_i}]^s,$$

$x_1, x_2, \ldots, x_i$ étant les racines qui correspondent respectivement à chacun des groupes dont on a parlé; et conséquemment, pour $s = 1$, l'équation $P_r = 0$ aura pour racines les $x_1, x_2, \ldots, x_i$ aux degrés de multiplicité respectifs $r_1, r_2, \ldots, r_i$: Il va sans dire que dans la démonstration directe de ce théorème les équations que l'on rencontre et qui sont les homologues de (a), (b), (c), (d) n'ont nullement la forme de ces dernières.

Dans le cas de $s = n$, ce théorème coïncide avec celui de M. Sylvester, relatif du discriminant d'une fonction homogène à deux variables (*Philosophical Magazine*, mai 1852). Le grand avantage de l'indétermination de s consiste dans la possibilité de déterminer les équations qui ont pour racines les racines communes ou les racines multiples; et cela par la simple supposition de $s = 1$.

Si $x_1 = x_2 = \ldots = x_i$, c'est-à-dire si l'équation $f(x) = 0$ admet $r + 1$ fois la racine x_1, en faisant $s = 1$, on aura, comme corollaire du dernier théorème,

$$P_r = \frac{d^r V}{da_n^r} (x - x_1)^r,$$

et, par suite,

$$x_1 = \frac{d^r V}{da_n^{r-1}\, da_{n-1}} : \frac{d^r V}{da_n^r}$$

pour l'expression de la racine multiple.

L'extension de la méthode au cas de trois équations à deux variables ne présente aucune difficulté. Supposons que les équations $f(x, y) = 0$, $\varphi(x, y) = 0$ admettent les couples de racines communs

$$(h) \qquad (x_1, y_1); \quad (x_2, y_2), \ldots, \quad (x_\mu, y_\mu),$$

et soit

$$\begin{aligned}\psi(x, y) = a_{0,0} x^m &+ (a_{1,0} + a_{1,1} y) x^{m-1} \\ &+ (a_{2,0} + a_{2,1} y + a_{2,2} y^2) x^{m-2} + \ldots \\ &+ (a_{m,0} + a_{m,1} y + \ldots + a_{m,m} y^m) = 0\end{aligned}$$

une troisième équation. Si l'on fait

$$V = \psi(x_1, y_1)\, \psi(x_2, y_2) \ldots \psi(x_\mu, y_\mu),$$

$$V_1 = \frac{V}{\psi(x_1, y_1)}, \quad V_{1,2} = \frac{V_1}{\psi(x_2, y_2)}, \ldots,$$

on aura

$$\frac{dV}{da_{r_1,s_1}} = x_1^{m-r_1} y_1^{s_1} V_1 + x_2^{m-r_1} y_2^{s_1} V_2 + \ldots + x_\mu^{m-r_1} y_\mu^{s_1} V_\mu.$$

Lors donc que le seul groupe (x_1, y_1) donnera $\psi(x, y) = 0$, il viendra

$$\frac{dV}{da_{r_1,s_1}} = x_1^{m-r_1} y_1^{s_1} V_1,$$

d'où

$$\frac{dV}{da_{m,0}} = V_1, \quad \frac{dV}{da_{m,1}} = y_1 V_1, \quad \frac{dV}{da_{m-1,0}} = x_1 V_1,$$

ce qui fait connaître x_1 et y_1. De même, si les deux seuls groupes (x_1, y_1), (x_2, y_2) de la suite (h) annulent $\psi(x, y)$, on a

$$\frac{d^2V}{da_{m,0}} = 2V_{1,2}, \quad \frac{d^2V}{da_{m,0}\, da_{m,1}} = (y_1 + y_2) V_{1,2}, \quad \frac{d^2V}{da_{m,1}^2} = 2 y_1 y_2 V_{1,2},$$

$$\frac{d^2V}{da_{m,0}\, da_{m-1,0}} = (x_1 + x_2) V_{1,2}, \quad \frac{d^2V}{da_{m-1,0}^2} = 2 x_1 x_2 V_{1,2},$$

et ainsi de suite.

On pourrait donner à ces résultats une forme plus générale, comme dans le cas de deux équations ; mais la chose ne présente pas de difficulté. On pourrait aussi obtenir les conditions analogues à celles de Lagrange, pour que trois ou un plus grand nombre d'équations admettent des racines communes. Pour le cas précédent, par exemple, on aurait

$$V = 0, \quad \frac{dV}{da_{m,0}} = 0, \quad \frac{d^2V}{da_{m,0}^2} = 0.$$

SUR

LA DIFFÉRENTIATION DES FONCTIONS DE FONCTIONS-SÉRIES

DE BURMANN, DE LAGRANGE, DE WRONSKI ;

PAR M. A...,
Ancien élève de l'École Polytechnique.

Soient les deux équations

$$z = F(y), \quad y = \varphi(x);$$

on se propose de calculer $\frac{d^n z}{dx^n}$ sans passer par $\frac{dz}{dx}, \frac{d^2 z}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}}$. On a

$$\frac{dz}{dx} = F'(y).\varphi'(x),$$

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = F'(y)\varphi''(x) + F''(y)\varphi'(x)^2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{d^n z}{dx^n} = A_1 F'(y) + A_2 F''(y) + \ldots + A_n F^{(n)}(y).$$

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ étant des coefficients qui dépendent uni-

quement de $\varphi(x)$ et nullement de la fonction $F(y)$, comme il est facile de le montrer en prouvant que la loi, supposée vraie pour la dérivée $n^{ième}$, le sera encore pour la dérivée $(n+1)^{ième}$.

On peut donc prendre pour $F(y)$ une fonction quelconque de y, e^{py} par exemple, et $A_1, A_2, \ldots, A_n$ seront les coefficients qui multiplieront $pe^{py}, p^2 e^{py}, \ldots, p^n e^{py}$ dans l'expression de $\frac{d^n . e^{py}}{dx^n}$ qu'il s'agit conséquemment de trouver.

Observons, à cet effet, que $\frac{1}{1.2.3\ldots n}\frac{d^n . e^{p\varphi(x)}}{dx_n}$ est le coefficient de h^n dans le développement de $e^{p\varphi(x+h)}$ suivant les puissances de h. Or

$$e^{p\varphi(x+h)} = e^{p\left[\varphi(x)+\varphi'(x)h+\varphi''(x)\frac{h^2}{1.2}+\ldots\right]}$$

$$= e^{p\varphi(x)}\, e^{p\varphi'(x)h}\, e^{p\varphi''(x)\frac{h^2}{1.2}}.$$

En développant $e^{p\varphi'(x)h}$, $e^{p\varphi''(x)\frac{h^2}{1.2}}, \ldots$, et effectuant le produit, on aura pour terme général

$$e^{p\varphi(x)}\Sigma p^{m_1+m_2+\ldots+m_n}\frac{\left[\frac{\varphi'(x)}{1}\right]^{m_1}}{1.2.3\ldots m_1}\cdot\frac{\left[\frac{\varphi''(x)}{1.2}\right]^{m_2}}{1.2.3\ldots m_2}\times\ldots$$

$$\times\frac{\left[\frac{\varphi^{(n)}(x)}{1.2.3\ldots n}\right]^{m_n}}{1.2.3\ldots m_n}\cdot h^{m_1+2m_2+\ldots+nm_n};$$

par conséquent, si l'on pose

$$m_1+2m_2+3m_3+\ldots+nm_n=n,$$

le coefficient de h^n sera

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n}\frac{d^n.e^{py}}{dx^n} = e^{p\varphi(x)}\,\Sigma\, p^{m_1+m_2+\ldots+m_n}\frac{\left[\frac{\varphi'(x)}{1}\right]^{m_1}}{1.2.3\ldots m_1}\times\ldots$$
$$\times\frac{\left[\frac{\varphi^{(n)}(x)}{1.2.3\ldots n}\right]^{m_n}}{1.2.3\ldots m_n}.$$

Pour avoir dans cette équation le coefficient de $p^m e^{py}$ ou A_m, il ne faudra prendre évidemment que les termes pour lesquels on aura

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_n = m.$$

Donc, en définitive, on aura

$$A_m = 1.2.3\ldots n\,\Sigma\,\frac{\left[\frac{\varphi'(x)}{1}\right]^{m_1}}{1.2.3\ldots m_1}\cdot\frac{\left[\frac{\varphi''(x)}{1}\right]^{m_2}}{1.2.3\ldots m_2}\cdots\cdot\frac{\left[\frac{\varphi^{(n)}(x)}{1.2.3\ldots n}\right]^{m_n}}{1.2.3\ldots m_n},$$

$m_1, m_2,\ldots, m_n$ étant des nombres entiers et positifs (y compris zéro) qui doivent satisfaire aux équations

$$m_1 + 2m_2 + 3m_3 + \ldots + nm_n = n,$$
$$m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_n = m.$$

Dans cette solution, on a cherché d'abord dans le développement de $e^{p\left[\varphi'(x)h+\varphi''(x)\frac{h^2}{1.2}+\ldots\right]} = e^{p[\varphi(x+h)-\varphi(x)]}$ le terme en h^n; et dans ce terme, on a pris seulement ce qui était multiplié par p^m. On peut évidemment faire l'inverse, chercher dans le développement $e^{p[\varphi(x+h)-\varphi(x)]}$ le terme en p^m, qui est

$$\frac{[\varphi(x+h)-\varphi(x)]^m}{1.2.3\ldots m},$$

et puis ne prendre dans ce terme que ce qui est multiplié par h^n, c'est-à-dire, comme $\varphi(x+h)-\varphi(x)$ est

divisible par h, le coefficient de h^{n-m} dans la fonction $\frac{\left[\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}\right]^m}{1.2.3\ldots m}$. Or ce coefficient est, d'après le théorème de Taylor,

$$\frac{d^{n-m}}{dh^{n-m}}\left[\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}\right]_0^m \frac{1}{1.2.3\ldots(n-m)}$$

(le zéro indiquant qu'on doit faire $h=0$ après les différentiations). On aura donc

$$A_m = \frac{1.2.3\ldots n}{1.2.3\ldots(n-m).1.2.3\ldots m}\frac{d^{n-m}\left[\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}\right]_0^m}{dh^{n-m}}$$

$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1.2.3\ldots m}\frac{d^{n-m}\left[\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}\right]_0^m}{dh^{n-m}}.$$

Autrement : soit i l'accroissement de y correspondant à l'accroissement h de x, en sorte que

$$i = \varphi(x+h) - \varphi(x),$$

on aura

$$F(y+i) = F(y) + F'(y)i + \ldots + \frac{F^{(n)}(y)}{1.2.3\ldots n}i^n + \ldots$$

$$= F(y) + \frac{dF(y)}{dx}h + \ldots + \frac{d^nF(y)}{dx^n}\frac{h^n}{1.2.3\ldots n} + \ldots,$$

en supposant que dans $F(y)$, on ait remplacé y par $\varphi(x)$ et changé ensuite x en $x+h$.

Remplaçant i par sa valeur, dans cette équation, observant que $\varphi(x+h)-\varphi(x)$ est divisible par h, et que, par suite, le terme de h^n dans i^m est

$$\frac{d^{n-m}\left[\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}\right]_0^m}{1.2.3\ldots(n-m).dh^{n-m}}$$

on aura, en posant

$$\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}=\theta,$$

et identifiant les termes en h^n,

$$\frac{\frac{d^n F(y)}{dx^n}}{1.2.3\ldots n}=\frac{F'(y)\frac{d^{n-1}(\theta)_0}{dh^{n-1}}}{1.2.3\ldots(n-1)}+\frac{F''(y)\frac{d^{n-2}(\theta^2)_0}{dh^{n-2}}}{1.2.3\ldots n-2}+\ldots$$

$$+\frac{\frac{F^{(m)}(y)}{1.2.3\ldots m}\frac{d^{n-m}(\theta^m)_0}{dh^{n-m}}}{1.2.3\ldots(n-m)}+\ldots+\frac{F^{(n)}(y)(\theta^n)_0}{1.2\ldots n},$$

ou bien

$$(a)\quad\left\{\begin{aligned}\frac{d^n z}{dx^n}&=\frac{n}{1}F'(y)\frac{d^{n-1}(\theta)_0}{dh^{n-1}}+\frac{n(n-1)}{1.2}F''(y)\frac{d^{n-2}(\theta^2)_0}{dh^{n-2}}\\&+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}F''(y)\frac{d^{n-3}(\theta^3)_0}{dh^{n-3}}+\ldots\end{aligned}\right.$$

Si l'on avait trois équations

$$z=F(y),\quad y=\varphi(x),\quad x=f(u),$$

ou

$$z=\Phi(x)=\Pi(u);$$

en posant

$$\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}=\theta,$$

on aurait, par ce qui précède,

$$\frac{d^n z}{dx^n}=\Phi^{(n)}(x)=\frac{n}{1}F'(y)\frac{d^{n-1}(\theta)_0}{dh^{n-1}}$$

$$+\frac{n(n-1)}{1.2}F''(y)\frac{d^{n-2}(\theta^2)_0}{dh^{n-2}}+\ldots=U_n,$$

puis, en faisant $\frac{f(u+\varepsilon)-f(u)}{\varepsilon}=\omega$,

$$\frac{d^n\Phi(x)}{du^n}=\frac{d^n z}{du^n}\ \frac{1}{2}=U_1\frac{d^{n-1}(\omega)_0}{d\varepsilon^{n-1}}+\frac{n(n-1)}{1.2}U_2\frac{d^{n-2}(\omega^2)_0}{d\varepsilon^{n-2}}+\ldots.$$

Il ne resterait plus qu'à remplacer U_1, U_2,..., U_n par leur valeur pour mettre en évidence la loi de dérivation pour les fonctions de fonctions; et ainsi de suite quel que soit le nombre des fonctions superposées.

Revenons à l'équation (a) qu'on peut encore écrire

$$(1).\quad \left\{\begin{aligned}\frac{d^n z}{dx^n}&=(\theta^n)_0\frac{d^n z}{dy^n}+\frac{n}{1}\frac{d(\theta^{n-1})_0}{dh}\frac{d^{n-1}z}{dy^{n-1}}\\&+\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{d^2(\theta^{n-2})_0}{dh^{n-2}}\frac{d^{n-2}z}{dy^{n-2}}+\ldots,\end{aligned}\right.$$

et, supposant qu'on ait $z=F(x)$, $y=\varphi(x)$, cherchons $\frac{d^n z}{dy^n}$. z pouvant évidemment être considéré comme une fonction implicite de y, on aura, d'après l'équation (1),

$$\frac{d^n z}{dx^n}=(\theta^n)_0\frac{d^n z}{dy^n}+\frac{n}{1}\frac{d(\theta^{n-1})_0}{dh}\frac{d^{n-1}z}{dy^{n-1}}$$
$$+\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{d^2(\theta^{n-2})_0}{dh^2}\frac{d^{n-2}z}{dy^{n-2}}+\ldots,$$

$$\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}=(\theta^{n-1})_0\frac{d^{n-1}z}{dy^{n-1}}+\frac{n-1}{1}\frac{d(\theta^{n-2})_0}{dh}\frac{d^{n-2}z}{dy^{n-2}}+\ldots,$$

....

$$\frac{d^{n-m}z}{dx^{n-m}}=(\theta^{n-m})_0\frac{d^{n-m}z}{dy^{n-m}}+\frac{n-m}{1}\frac{d(\theta^{n-m-1})_0}{dh}\frac{d^{n-m-1}z}{dy^{n-m-1}}+\ldots,$$

....

$$\frac{d^2 z}{dx^2}=(\theta^2)_0\frac{d^2 z}{dy^2}=\frac{2}{1}\frac{d(\theta_0)}{dy}\frac{dz}{dy},$$

$$\frac{dz}{dx}=(\theta)_0\frac{dz}{dy}.$$

Si l'on multiplie ces équations, en commençant par la pre-

mière, respectivement par

$$(\theta^{-n})_0,\quad \frac{n-1}{1}\,\frac{d(\theta^{-n})_0}{dh},$$

$$\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\,\frac{d^2(\theta^{-n})_0}{dh^2},\ \ldots,\quad \frac{d^{n-1}(\theta^{-n})_0}{dh^{n-1}},$$

et qu'on ajoute les résultats, on obtiendra

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d^n z}{dy^n} &= (\theta^{-n})_0\,\frac{d^n z}{dx^n} + \frac{n-1}{1}\,\frac{d(\theta^{-n})_0}{dh}\,\frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} \\ &+ \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\,\frac{d^2(\theta^{-n})_0}{dh^2}\,\frac{d^{n-2} z}{dx^{n-2}} + \ldots \end{aligned}\right.$$

En effet, en désignant par $\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1.2.3\ ..(m-1)}$ C le coefficient de $\frac{d^{n-m} z}{dy^{n-m}}$ dans la somme des produits ci-dessus, on aura

$$C = n(\theta^{-n})_0\,\frac{d^m(\theta^{n-m})_0}{dh^m} + (n-1)\frac{m}{1}\,\frac{d(\theta^{-n})_0}{dh}\,\frac{d^{m-1}(\theta^{n-m})_0}{dh^{m-1}} + \ldots$$

$$+ (n-m+1)\frac{m}{1}\,\frac{d^{m-1}(\theta^{-n})_0}{dh^{m-1}}\,\frac{d(\theta^{n-m})_0}{dh} + (n-m)\frac{d^m(\theta^{-n})_0}{dh^m}(\theta^{n-m})_0,$$

ou bien

$$C = n\left[\begin{aligned} &(\theta^{-n})_0\frac{d^m(\theta^{n-m})_0}{dh^m} + \frac{m}{1}\,\frac{d(\theta^{-n})_0}{dh}\,\frac{d^{m-1}(\theta^{n-m})_0}{dh^{m-1}} + \ldots \\ &\qquad + \frac{d^m(\theta^{-n})_0}{dh^m}(\theta^{n-m})_0 \end{aligned}\right]$$

$$- m\left[\begin{aligned} &\frac{d(\theta^{-n})_0}{dh}\,\frac{d^{m-1}(\theta^{n-m})_0}{dh^{m-1}} + \frac{(m-1)}{1}\,\frac{d^2(\theta^{-n})_0}{dh^2}\,\frac{d^{m-2}(\theta^{n-m})_0}{dh^{m-2}} + \ldots \\ &\qquad + \frac{d^m(\theta^{-n})}{dh^m}(\theta^{n-m})^0 \end{aligned}\right]$$

$$= n\left[\frac{d^m(\theta^{-n}.\theta^{n-m})_0}{dh^m}\right] - m\left[\frac{d^{m-1}}{dh^{m-1}}\left(\frac{d.(\theta^{-n})}{dh}.\theta^{n-m}\right)_0\right]$$

$$= n\left[\frac{d^m(\theta^{-m})_0}{dh^m}\right] - m\left[-n\,\frac{d^{m-1}}{dh^{m-1}}\left(\theta^{-m-1}\,\frac{d\theta}{dh}\right)_0\right],$$

ou enfin

$$C = n\left[\frac{d^m(\theta^{-m})_0}{dh^m}\right] - m\left[\frac{n}{m}\,\frac{d^m(\theta^{-m})_0}{dh^m}\right] = 0;$$

ce qui rend manifeste l'exactitude de l'équation (2).

Si l'on observe qu'on a, en général,

$$\frac{d^m F(x)}{dx^m} = \frac{d^m F(x+h)_0}{dh^m},$$

et qu'on pose

$$z = F(x),$$

l'équation (2) pourra s'écrire, plus brièvement,

$$(3) \qquad \frac{d^n F(x)}{dy^n} = \frac{d^{n-1}}{dh^{n-1}}[\theta^{-n} F'(x+h)]_0.$$

On déduit de cette dernière équation une démonstration très-simple et très-directe de la série de Burmann.

Soit, en effet, x une fonction de y donnée par l'équation $y = \varphi(x)$. En remplaçant, dans la fonction $F(x)$, x par sa valeur en y censée déduite de cette équation, et supposant que $F(x)$ devienne alors une fonction continue de y, le théorème de Taylor donnera un développement de la forme

$$F(x) = A_0 + A_1 y + A_2 y^2 + \ldots.$$

Différentiant n fois cette série et ayant soin de faire $y = 0$ après les différentiations, on aura, sous cette dernière condition,

$$A_n = \frac{1}{1.2.3..n}\,\frac{d^n F(x)}{dy^n},$$

ou bien, en ayant égard à l'équation (3) et désignant par a

la valeur de x, qui répond à $y=0$,

$$A_n = \frac{1}{1.2.3\ldots n} \frac{d^{n-1}}{dh^{n-1}} \left\{ \left[\frac{\varphi(a+h)}{h} \right]^{-n} F'(a+h) \right\}_0,$$

ou, si l'on veut,

$$(4) \qquad A_n = \frac{1}{1.2.3\ldots n} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left\{ \left[\frac{x-a}{\varphi(x)} \right]^n F'(x) \right\}_{(x=a)}.$$

Nous ne nous préoccupons pas ici de la question de savoir sous quelles conditions cette série de Burmann peut exister.

Quand on fait

$$\varphi x = \frac{x-a}{\psi(x)},$$

l'équation (4) devient

$$A_n = \frac{1}{1.2.3\ldots n} \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}} [\psi(a)^n F'(a)],$$

et l'on retrouve la série de Lagrange

$$F(x) = F(a) + [\psi(a) F'(a)] y + \frac{d}{da} [\psi(a)^2 F'(a)] \frac{y^2}{1.2} + \ldots,$$

propre à représenter une fonction $F(x)$ de la racine de l'équation

$$x = a + y\psi(x),$$

qui se réduit à a pour $y=0$.

Dans l'équation (2), faisons successivement $z=y$, $y^2, \ldots, y^n$, et désignons, pour abréger, $\frac{d^n \varphi(x)}{dx^n}$ par $D^n \varphi(x)$,

nous obtiendrons les identités

$$(A)\left\{\begin{aligned}
&0 = (\theta^{-n})_0 D^n \varphi(x) + \frac{n-1}{1}\frac{d(\theta^{-n})_0}{dh} D^{n-1}\varphi(x) + \ldots \\
&\qquad + \frac{d^{n-1}(\theta^{-n})_0}{dh^{n-1}} D\varphi(x), \\
&0 = (\theta^{-n})_0 D^n.\varphi(x)^2 + \frac{n-1}{1}\frac{d(\theta^{-n})_0}{dh} D^{n-1}.\varphi(x)^2 + \ldots \\
&\qquad + \frac{d^{n-1}(\theta^{-n})_0}{dh^{n-1}} D.\varphi(x)^2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
&0 = (\theta^{-n})_0 D^n.\varphi(x)^{n-1} + \frac{n-1}{1}\frac{d(\theta^{-n})_0}{dh} D^{n-1}.\varphi(x)^{n-1} + \ldots \\
&\qquad + \frac{d^{n-1}(\theta^{-n})_0}{dh^{n-1}} D.\varphi(x)^{n-1}, \\
&1.2.3\ldots n = (\theta^{-n})_0 D^n.\varphi(x)^n \\
&\qquad + \frac{n-1}{1}\frac{d(\theta^{-n})_0}{dh} D^{n-1}.\varphi(x)^n + \ldots \\
&\qquad + \frac{d^{n-1}(\theta^{-n})_0}{dh^{n-1}} D.\varphi(x)^n.
\end{aligned}\right.$$

Ces identités font voir que si l'on a les équations

$$\begin{aligned}
&D.\varphi(x).y_1 + D.\varphi(x)^2.y_2 + \ldots + D.\varphi(x)^n.y_n = D.F(x), \\
&D^2.\varphi(x).y_1 + D^2.\varphi(x)^2.y_2 + \ldots + D^2.\varphi(x)^n.y_n = D^2.F(x), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
&D^{n-1}.\varphi(x).y_1 + D^{n-1}.\varphi(x)^2.y_2 + \ldots + D^{n-1}.\varphi(x)^n.y_n = D^{n-1}.F(x), \\
&D^n.\varphi(x)y_1 + D^n.\varphi(x)^2.y_2 + \ldots + D^n.\varphi(x)^n.y_n = D^n.F(x),
\end{aligned}$$

et qu'on les multiplie respectivement par

$$\frac{d^{n-1}(\theta^{-n})_0}{dh^{n-1}},\quad \frac{n-1}{1}\frac{d^{n-2}(\theta^{-n})_0}{dh^{n-2}},\ \ldots,\quad (\theta^{-n})_0$$

on trouvera

$$1.2.3\ldots n y_n = (\theta^{-n})_0 \mathrm{D}^n.\mathrm{F}(x) + \frac{n-1}{1}\frac{d(\theta^{-n})_0}{dh}.\mathrm{D}^{n-1}.\mathrm{F}(x) + \ldots$$
$$= \frac{d^{n-1}}{dh^{n-1}}[\theta^{-n}\mathrm{F}'(x+h)]_0.$$

Mais les équations (A), résolues à la manière ordinaire, donnent

$$y_n = \frac{\Sigma[\pm \mathrm{D}^1.\varphi(x)\mathrm{D}^2.\varphi(x)^2\ldots \mathrm{D}^{n-1}.\varphi(x)^{n-1}\mathrm{D}^n.\mathrm{F}(x)]}{\Sigma[\pm \mathrm{D}^1.\varphi(x)\mathrm{D}^2.\varphi(x)^2\ldots \mathrm{D}^{n-1}.\varphi(x)^{n-1}.\mathrm{D}^n.\varphi(x)^n]},$$

les déterminants étant formés par rapport aux indices de différentiation. En égalant ces deux valeurs de y_n, on aura

$$(\alpha)\quad \frac{\frac{d^{n-1}}{dh^{n-1}}[\theta^{-n}\mathrm{F}'(x+h)]_0}{1.2.3\ldots n} = \frac{\Sigma[\pm \mathrm{D}^1.\varphi(x)\mathrm{D}^2.\varphi(x)^2\ldots \mathrm{D}^n.\mathrm{F}(x)]}{\Sigma[\pm \mathrm{D}^1.\varphi(x)\mathrm{D}^2.\varphi(x)^2\ldots \mathrm{D}^n.\varphi(x)^n]}.$$

En développant les deux membres de cette équation suivant les dérivées de F (x) et observant que les coefficients des mêmes dérivées doivent être identiques, à cause de l'indétermination de F(x), on aura, en égalant ceux de $\mathrm{D}^n.\mathrm{F}(x)$,

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n}(\theta^{-n})_0 = \frac{\Sigma[\pm \mathrm{D}^1.\varphi(x)\mathrm{D}^2.\varphi(x)^2\ldots \mathrm{D}^{n-1}.\varphi(x)^{n-1}]}{\Sigma[\pm \mathrm{D}^1.\varphi(x)\mathrm{D}^2.\varphi(x)^2\ldots \mathrm{D}^{n-1}.\varphi(x)^{n-1}\mathrm{D}^n.\varphi(x)^n]};$$

d'où l'on tirera

$$(\mathrm{B})\quad \begin{cases} \Sigma[\pm \mathrm{D}^1.\varphi(x)\mathrm{D}^2.\varphi(x)^2\ldots \mathrm{D}^n.\varphi(x)^n] \\ = 1!\,2!\ldots n!\left[\theta^{-\frac{n(n+1)}{2}}\right]_0 = 1!\,2!\ldots n![\mathrm{D}\varphi(x)]^{\frac{n(n+1)}{2}} \end{cases}$$

et, par suite, l'équation (α) deviendra

$$(\mathrm{C})\quad \begin{cases} \frac{1}{1.2.3\ldots n}\frac{d^{n-1}}{dh^{n-1}}[\theta^{-n}\mathrm{F}'(x+h)] \\ = \frac{\Sigma[\pm \mathrm{D}^1\varphi(x)\mathrm{D}^2.\varphi(x)^2\ldots \mathrm{D}^{n-1}.\varphi(x)^{n-1}\mathrm{D}^n\mathrm{F}(x)]}{1!\,2!\,3.\ldots n![\mathrm{D}\varphi(x)]^{\frac{n(n+1)}{2}}}, \end{cases}$$

(le symbole $r!$ représentant, suivant l'usage, le produit continuel $1.2.3\ldots r$).

Ce beau théorème, ainsi que l'équation (β), sont dus à M. Wronski (*Philosophie de la Technie*, 2e sect., p. 110). M. Prouhet a donné, par d'autres considérations, une belle démonstration de l'équation (β).

(Extrait des *Nouvelles Annales* de M. Terquem, tomes IX et XI.)

APERÇU SUCCINCT

SUR

LES HYPERDÉTERMINANTS ET LES INVARIANTS;

PAR LE TRADUCTEUR.

Considérons un système de n fonctions algébriques, entières, etc.,

$$(f) \qquad f_1,\ f_2,\ldots,\ f_n$$

des variables $x, y,\ldots, z$ en nombre quelconque; et soit φ une nouvelle fonction des mêmes variables, dont les coefficients dépendent, suivant de certaines lois, de ceux des proposées. Remplaçons, dans les fonctions (f),

$$(\alpha)\qquad \left\{\begin{array}{l} x \text{ par } \alpha x + \alpha' y + \ldots + \alpha^{(i)} z, \\ y \text{ par } \beta x + \beta' y + \ldots + \beta^{(i)} z, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z \text{ par } \gamma x + \gamma' y + \ldots + \gamma^{(i)} z, \end{array}\right.$$

ce qui les transforme dans

$$(f') \qquad f'_1,\ f'_2,\ldots,\ f'_n.$$

Formons une fonction Φ, composée à l'égard des fonctions

(f') absolument de la même manière que φ est composée à l'égard des fonctions (f), en sorte que Φ est ce que devient φ quand, dans cette dernière fonction, on met en lieu et place des coefficients des fonctions (f) les coefficients correspondants des fonctions (f'). Ces points entendus, s'il arrive que la fonction φ soit d'une forme telle, qu'en la soumettant à la substitution (α) elle reproduise précisement la fonction Φ [à un facteur *numérique* près (*)], cette fonction φ constitue dans ce cas ce que M. Cayley, à qui la conception en est due, a nommé une fonction *hyperdéterminante* ou un *hyperdéterminant* relatif au système (f). En résumé, les hyperdéterminants sont des fonctions tellement composées à l'égard d'un système donné, que les fonctions homologues, relatives au système linéairement transformé, sont les transformées des premières suivant la même substitution.

Par exemple, supposons que le système (f) se réduise à la seule fonction

$$f = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3,$$

et prenons

$$\varphi = (b^2 - ac)x^2 + (bc - ad)xy + (c^2 - bd)y^2.$$

La substitution $x = x + \alpha'y$, $y = y$ transforme f dans

$$f' = a'x^3 + 3b'x^2y + 3c'xy^2 + d'y^3,$$

où

$$a' = a,\quad b' = b + a\alpha',\quad c' = c + 2b\alpha' + a\alpha'^2,$$
$$d' = d + 3c\alpha' + 3b\alpha'^2 + a\alpha'^3.$$

La fonction Φ, déduite de f' de la même manière que φ

(*) Il faut entendre par ce facteur numérique un facteur uniquement dépendant des éléments α, α',..., de la substitution. Je n'en parlerai pas dans ce qui suit.

de f, c'est-à-dire

$$\Phi = (b'^2 - a'c')x^2 + (b'c' - a'd')xy + (c'^2 - b'd')y^2,$$

devient, d'après les valeurs précédentes de a', b', c', d',

$$\Phi = (b^2 - ac)x^2 + \left|\begin{matrix} bc - ad \\ + 2(b^2 - ac)\alpha' \\ \end{matrix}\right| xy + \left|\begin{matrix} c^2 - bd \\ + (bc - ad)\alpha' \\ + (b^2 - ac)\alpha'^2 \end{matrix}\right| y^2$$

Or, si l'on soumet φ à la substitution $x = x + \alpha' y$, $y = y$, on trouve précisément cette dernière fonction Φ; et comme les mêmes circonstances se reproduiraient pour la substitution tout à fait générale $x = \alpha x + \alpha' y$, $y = \beta x + \beta' y$, il en résulte que φ est un hyperdéterminant de f.

On suppose ordinairement que le déterminant

$$M = \left|\begin{matrix} \alpha & \alpha' \ldots & \alpha^{(i)} \\ \beta & \beta' \ldots & \beta^{(i)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \gamma & \gamma' \ldots & \gamma^{(i)} \end{matrix}\right|$$

qu'on nomme le *module* de la substitution (α), est égal à l'unité, et dans ce cas la substitution est dite *unimodulaire*. Si ce module était quelconque, la substitution (α), introduite dans l'hyperdéterminant φ, reproduirait Φ multipliée par une certaine puissance du module, les fonctions (f) étant toutefois supposées homogènes.

Considérons, avec M. Sylvester, la substitution (α) et la substitution

$$(\mathrm{a}) \quad \left\{\begin{aligned} x &= \mathrm{a}x + \mathrm{a}'y + \ldots + \mathrm{a}^{(i)}z \\ y &= \mathrm{b}x + \mathrm{b}'y + \ldots + \mathrm{b}^{(i)}z \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z &= \mathrm{c}x + \mathrm{c}'y + \ldots + \mathrm{c}^{(i)}z \end{aligned}\right.$$

Ces deux substitutions étant supposées unimodulaires, supposons d'autre part que chaque élément de la seconde soit égal à ce que devient le déterminant M de la première

quand on remplace, dans ce déterminant, l'élément correspondant à celui que l'on considère par l'unité, et par des zéros tous les éléments situés dans la même ligne et dans la même colonne que celui qu'on vient de réduire à l'unité : en sorte que, par exemple,

$$b' = \begin{vmatrix} \alpha & 0 & \alpha'' \ldots & \alpha^{(i)} \\ 0 & 1 & 0 \ldots & 0 \\ \eta & 0 & \eta'' \ldots & \eta^{(i)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \gamma & 0 & \gamma'' \ldots & \gamma^{(i)} \end{vmatrix}$$

Tous les éléments du système (a) étant ainsi liés aux éléments du système (α), on vérifie aisément que les relations inverses ont également lieu, de façon que, par exemple,

$$\beta' = \begin{vmatrix} a & 0 & a'' \ldots & a^{(i)} \\ 0 & 1 & 0 \ldots & 0 \\ e & 0 & e'' \ldots & e^{(i)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c & 0 & c'' \ldots & c^{(i)} \end{vmatrix}$$

Deux substitutions, soumises à cette réciprocité, ont été nommées par M. Sylvester substitutions *complémentaires* ou *réciproques*.

Cette notion établie, et pour revenir aux métamorphoses des fonctions, reportons-nous aux fonctions (f) et, admettant toujours que la substitution unimodulaire (α) les a changées dans (f'), composons encore, d'après une même loi, les deux fonctions φ et Φ, l'une sur le système (f), l'autre sur le système (f'). Nous pourrons maintenant nous demander que la fonction φ se transforme dans Φ, non plus par la substitution primitive (α), mais par la substitution réciproque (a). Et ce double mode de réduction donnera naissance à deux espèces généralement distinctes de fonctions : les unes, déjà considérées, seront les hyperdéterminants ou, d'après M. Sylvester, les *covariants;* les autres,

par opposition, reçoivent du même auteur le nom de *contravariants*.

Comme on est généralement le maître d'imposer une substitution linéaire à une partie seulement des variables qui entrent dans une fonction et d'appliquer une substitution différente à une autre partie de ces variables, et ainsi de suite, le système (f), soumis simultanément à ces substitutions linéaires fractionnées, se transformera toujours dans un autre (f'); mais pour passer de la fonction φ à la fonction Φ, formée sur (f') comme φ l'est sur (f), on pourra, à chacune des substitutions partielles, adjoindre une substitution semblable ou une substitution complémentaire. Donc φ sera relativement au système (f) covariant pour une partie des variables et contravariant pour une autre partie (*).

Lorsque la fonction φ ne dépend uniquement que des coefficients des fonctions (f), la distinction entre les covariants et les contravariants s'évanouit, et ces deux espèces de fonctions vont se fondre dans une espèce-limite qui, ne donnant plus de prise à la substitution, acquiert la remarquable propriété de rester identique à elle-même quand on la compose sur le système (f) ou sur le système transformé (f'). En considération de cette propriété, les fonctions qui la possèdent ont reçu le nom caractéristique d'*invariants*.

Ainsi, pour mettre la définition en lumière et sans égard pour la répétition, les *invariants* sont des fonctions des coefficients d'un système primitif donné qui se réduisent d'elles-mêmes à leur expression primitive lorsqu'on essaye de remplacer ces coefficients par les coefficients homologues relatifs au système uni-linéairement transformé.

(*) M. Sylvester a reconnu depuis que les contravariants ne différaient pas des covariants.

Réduisons, par exemple, le système à la fonction unique et simple

$$f = ax^2 + 2bxy + cy^2.$$

Par la substitution unimodulaire

$$\begin{array}{l} x = \alpha x + \alpha' y \\ y = \beta x + \beta' y \end{array}, \quad (\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1),$$

elle devient

$$f' = a'x^2 + 2b'xy + c'y^2.$$

Et si l'on forme avec les coefficients de f la fonction

$$b^2 - ac,$$

avec ceux de f' la fonction analogue $b'^2 - a'c'$, on trouve, en vertu de a', b', c' en a, b, c, α, β, ...,

$$b'^2 - a'c' = (b^2 - ac)(\alpha\beta' - \alpha'\beta)^2 = b^2 - ac.$$

La fonction $b^2 - ac$ est donc un invariant de f.

On rencontre un invariant dans le dernier terme de l'équation aux différences des racines d'une équation donnée $f(x, y) = 0$. Car par la substitution $x = x - hy$, toutes les racines se trouvant augmentées d'une même quantité, leurs différences ne sont pas altérées, et il en est, par suite, de même des coefficients de l'équation aux différences, qui sont des fonctions symétriques de ces différences, et s'expriment d'ailleurs par les coefficients de la proposée : mais le dernier coefficient reste seul inaltéré par les substitutions qui affectent y.

Une fonction quelconque d'un certain nombre d'invariants est évidemment elle-même un invariant pour le système considéré. Les invariants qui ne peuvent pas s'exprimer sous forme rationnelle les uns par les autres sont appelés invariants *fondamentaux*.

Les invariants sont astreints à vérifier certaines équa-

tions aux différences partielles, qui sont une conséquence immédiate de leur définition, et constituent à leur tour les bases de leur entière détermination. Considérons spécialement le cas où le système primitif se réduit à la fonction homogène à deux variables du degré n

$$f = a_0 x^n + n a_1 x^{n-1} y + \frac{n(n-1)}{1.2} a_2 x^{n-2} y^2 + \ldots + a_n y^n,$$

$a_0, a_1, \ldots$ étant ce qu'on nomme les coefficients. La substitution unimodulaire

$$x = x + \eta y, \quad y = y$$

la transforme dans

$$f' = a'_0 x^n + n a'_1 x^{n-1} y + \frac{n(n-1)}{1.2} a'_2 x^{n-2} y^2 + \ldots + a'_n y^n,$$

où

$$\begin{aligned}
a'_0 &= a_0, \\
a'_1 &= a_1 + a_0 \eta, \\
a'_2 &= a_2 + 2 a_1 \eta + a_0 \eta^2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a'_i &= a_i + i a_{i-1} \eta + \frac{i(i-1)}{1.2} a_{i-2} \eta^2 + \ldots + a_0 \eta^i. \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a'_n &= a_n + n a_{n-1} \eta + \ldots + n a_1 \eta^{n-1} + a_0 \eta^n.
\end{aligned}$$

Un invariant quelconque φ relatif à f devant rester indépendant de η quand on y remplace $a_0, a_1, \ldots, a_n$ par $a'_0, a'_1, \ldots, a'_n$, on peut égaler à zéro sa dérivée par rapport à η après cette substitution, et l'équation ainsi obtenue suffit pour établir l'indépendance dont il s'agit. Or on a

$$\frac{d\varphi}{d\eta} = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{d\varphi}{da'_i} \frac{da'_i}{d\eta}$$

$$= \sum_{i=0}^{i=n} i \left[a_{i-1} + \frac{i-1}{1} a_{i-2} \eta + \frac{(i-1)(i-2)}{1.2} a_{i-3} \eta^2 + \ldots + a_1 \eta^{i-1} \right] \frac{d\varphi}{da'_i},$$

c'est-à-dire

$$\frac{d\varphi}{d\eta} = \sum_{i=0}^{i=n} ia'_{i-1} \frac{d\varphi}{da'_i};$$

et comme la composition de φ en a'_0, $a'_1, \ldots, a'_n$ doit être parfaitement la même qu'en a_0, $a_1, \ldots, a_n$, et que ces dernières quantités sont tout à fait quelconques, rien n'empêche de supprimer les accents, et d'écrire en conséquence

$$(i) \qquad \sum_{i=0}^{i=n} ia_{i-1} \frac{d\varphi}{da_i} = 0.$$

Au reste, si cette suppression d'accents paraissait quelque peu illicite, on lèverait toute espèce de doute à cet égard en observant que la transformation inverse $x = x - \eta y$, $y = y$ devant ramener f' à f, on aurait, en changeant η en $-\eta$ dans l'expression ci-dessus de a'_i,

$$a_i = a'_i - ia'_{i-1}\eta + \frac{i(i-1)}{1.2} a'_{i-2}\eta^2 + \ldots + a'_0 \eta^i;$$

et, par suite,

$$0 = \frac{d\varphi}{d\eta} \sum_{i=0}^{i=n} \frac{d\varphi}{da_i} \frac{da_i}{d\eta}$$

$$= -\sum_{i=0}^{i=n} i\left(a'_{i-2} - \frac{i-1}{1} a'_{i-2}\eta + \ldots\right) \frac{d\varphi}{da_i} = -\sum_{i=0}^{i=n} ia_{i-1} \frac{d\varphi}{da_i}.$$

Si, au lieu de la substitution $x = x + \eta y$, $y = y$, on eût pris $x = x$, $y = y + \eta x$, ce qui revient à écrire en ordre inverse la fonction f, à échanger l'un dans l'autre x et y, et à faire la première substitution, on eût trouvé évidem-

ment

$$(j) \qquad \sum_{i=0}^{i=n} i a_{n-i+i} \frac{d\varphi}{da_{n-i}} = 0.$$

Une fonction φ satisfaisant aux deux équations (i) et (j) jouira de la propriété de rester invariable par les deux substitutions successives

$$\begin{cases} x = x' + \xi y' \\ y = y' \end{cases}, \quad \begin{cases} x' = x'' \\ y' = y'' + \eta x'' \end{cases},$$

et conséquemment par la substitution résultante unimodulaire

$$\begin{cases} x = (1 + \xi\eta) x'' + \xi y'' \\ y = \eta x'' + y'' \end{cases};$$

d'où, par répétition, on conclura à l'invariabilité de la fonction φ pour une substitution unimodulaire quelconque. Par où l'on voit que les deux équations différentielles précédentes caractérisent complétement les invariants et sont parfaitement suffisantes pour leur entière détermination. M. Cayley a prouvé, dans un travail, sans doute actuellement publié, qu'une seule équation différentielle, jointe à la condition d'homogénéité, est tout à fait propre à remplacer les deux équations dont il s'agit (*).

En se fondant sur le résultat précédent, il serait facile de former les équations différentielles que doivent vérifier les invariants pour une fonction de plus de deux variables. Il suffirait d'écrire la fonction donnée sous la forme d'une

(*) La méthode que j'ai suivie pour établir les équations différentielles ci-dessus coïncide à son début avec celle qu'a employée M. Sylvester (*The Cambridge and Dublin, etc.*, 1852. *Sur le Calcul des Formes*, sect. IV), en ce sens que j'emploie la même substitution $y = y$, $x = x + \eta y$. Mais à partir de là le procédé de la différentiation que je substitue à un certain développement par la formule de Taylor, me paraît beaucoup plus simple, sinon plus satisfaisant.

somme de polynômes homogènes en x et y, de degrés décroissants de n à o, multipliés par les puissances et produits des autres variables propres à rétablir l'homogénéité dans chaque groupe; car, comme la substitution simple $y = y$, $x = x + \eta y$ permettrait alors d'avoir, par ce qui précède et pour chaque groupe, les coefficients de la fonction transformée, le procédé de différentiation par rapport à η s'appliquerait avec le même succès et conduirait à deux premières équations différentielles. Puis une autre substitution, telle que $z = z + \eta y$, $y = y$, jointe à un autre groupement des termes du polynôme, fournirait deux autres équations, et ainsi de suite. On passerait ensuite sans peine au cas général d'un système quelconque de fonctions homogènes. Mais je dois me borner ici à ces simples indications, mon but ayant été dès l'abord de donner uniquement les notions, en quelque sorte rudimentaires, qui se trouvent à l'origine d'une vaste et féconde théorie qu'enrichissent et étendent tous les jours les travaux de MM. Cayley, Sylvester, Hermite, etc. On trouvera dans le tome XXX du *Journal de Crelle* le remarquable Mémoire où M. Cayley pose les fondements de cette grande théorie, et la lecture du *Calcul des Formes* de M. Sylvester (*) achèvera de faire comprendre tout ce qu'elle offre de ressources aux esprits investigateurs (**).

(*) *The Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, 1852.

(**) Depuis que ceci a été remis pour l'impression, M. Cayley a publié dans les *Transactions Philosophiques* (1854-1856) trois magnifiques Mémoires sur la théorie dont il s'agit. MM. Hermite et Sylvester sont, de leur côté, arrivés à d'importants résultats consignés dans le *Quarterly-Review* que je n'ai pas présentement sous les yeux.

NOTE DE L'AUTEUR

SUR

UNE PROPRIÉTÉ DES INVARIANTS ET SUR QUELQUES FORMULES

POUR

LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES.

---

1. Dans le tome XXVII du *Journal de Crelle* (p. 105), M. Eisenstein a signalé la relation suivante :

$$(1)\quad \left\{ \begin{array}{l} (a_0^2 a_3^2 - 6a_0 a_1 a_2 a_3 + 4a_0 a_2^3 + 4a_1^3 a_3 - 3a_1^2 a_2^2)^3 \\ = A_0^2 A_3^2 - 6A_0 A_1 A_2 A_3 + 4A_0 A_2^3 + 4A_1^3 A_3 - 3A_1^2 A_2^2, \end{array} \right.$$

où

$$A_0 = a_0 a_3^2 - 3a_1 a_2 a_3 + 2a_2^3,$$
$$A_1 = -a_0 a_2 a_3 + 2a_1^2 a_3 - a_1 a_2^2,$$
$$A_2 = -a_0 a_1 a_3 + 2a_0^2 a_3 - a_1^2 a_2,$$
$$A_3 = a_0^2 a_3 - 3a_0 a_1 a_2 + 2a_1^3.$$

Si l'on fait

$$u = a_0^2 a_3^2 - 6a_0 a_1 a_2 a_3 + 4a_0 a_2^3 + 4a_1^3 a_3 - 3a_1^2 a_2^2,$$

les dernières relations reviennent à

$$A_0 = \frac{1}{2}\frac{du}{da_0},\quad A_1 = \frac{1}{6}\frac{du}{da_1},\quad A_2 = \frac{1}{6}\frac{du}{da_2},\quad A_3 = \frac{1}{2}\frac{du}{da_3}.$$

L'expression u est le discriminant bien connu de la fonction homogène du troisième degré

$$(2)\qquad a_0 x^3 + 3a_1 x^2 y + 3a_2 xy^2 + a_3 y^3;$$

et si l'on désigne par U le discriminant de

$$(3)\qquad \frac{du}{da_0}x^3 + \frac{du}{da_1}x^2 y + \frac{du}{da_2}xy^2 + \frac{du}{da_3}y^3,$$

l'équation (1) pourra s'écrire

$$U = 16 u^3.$$

M. Sylvester a appelé l'expression (3) l'*évectant* du discriminant de la fonction (2), et généralement, si l'on considère la fonction homogène du $n^{\text{ième}}$ degré

$$(4)\qquad a_0 x^n + n a_1 x^{n-1} y + \frac{n(n-1)}{2} a_2 x^{n-2} y^2 + \ldots + a_n y_n,$$

et qu'on représente par φ un invariant quelconque de cette même fonction, il nomme évectant de cet invariant l'expression suivante :

$$\frac{d\varphi}{da_0} x^n + \frac{d\varphi}{da_1} x^{n-1} y + \frac{d\varphi}{da_2} x^{n-2} y^3 + \ldots + \frac{d\varphi}{da_n} y^n.$$

Cela posé, la relation d'Eisenstein peut être démontrée et généralisée au moyen de ce théorème :

Si l'on considère l'évectant d'un invariant quelconque d'une fonction homogène du $n^{\text{ième}}$ degré, tout invariant de cet évectant sera une fonction algébrique, entière, rationnelle des invariants de la fonction homogène considérée.

Cette proposition pourrait se déduire de l'importante loi de réciprocité de M. Sylvester (*); mais il ne sera peut-être pas inutile de l'établir directement comme il suit :

Un invariant quelconque φ de la fonction (4) doit, comme on sait, satisfaire aux deux équations

$$(5)\qquad \sum_{r=1}^{r=n} r a_{r-1} \alpha_r = 0, \quad \sum_{r=1}^{r=n} (n - r + 1) a_r \alpha_{r-1} = 0,$$

où $\alpha_r = \dfrac{d\varphi}{da_r}$; et pareillement un invariant ψ de l'évectant

(*) *The Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, november 1852. — *On the principles of the calculus of Forms*, sect. IV.

de l'invariant φ, c'est-à-dire un invariant ψ de

$$\alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} y + a_2 x^{n-2} y^2 + \ldots + \alpha_n y^n$$

sera déterminé par les deux équations

$$(6) \quad \sum_{r=1}^{r=n} (n-r+1)\alpha_{r-1} \frac{d\psi}{d\alpha_r} = 0, \quad \sum_{r=1}^{r=n} r\alpha_r \frac{d\psi}{d\alpha_{r-1}} = 0.$$

L'invariant ψ sera évidemment une fonction algébrique, entière et rationnelle des coefficients a_0, $a_1, \ldots, a_n$, et l'on aura

$$\frac{d\psi}{da_r} = \sum_{s=0}^{s=n} \frac{d\psi}{d\alpha_s} \frac{d\alpha_s}{da_r}.$$

Par suite, en observant que $\frac{d\alpha_s}{da_r} = \frac{d^2\varphi}{da_s\, da_r} = \frac{d\alpha_r}{da_s}$, il viendra

$$\sum_{r=1}^{r=n} ra_{r-1} \frac{d\psi}{da_r} = \sum_{s=0}^{s=n} \frac{d\psi}{d\alpha_s} \sum_{r=1}^{r=n} ra_{r-1} \frac{d\alpha_r}{da_s}.$$

Mais la première équation (5), différentiée par rapport à a_s, donne

$$\sum_{r=1}^{r=n} ra_{r-1} \frac{d\alpha_r}{da_s} = -(s+1)\alpha_{s+1};$$

donc, en observant que α_{n+1} n'existe pas,

$$\sum_{r=1}^{r=n} ra_{r-1} \frac{d\psi}{da_r} = -\sum_{s=0}^{s=n-1} (s+1)\alpha_{s+1} \frac{d\psi}{d\alpha_s} = -\sum_{r=1}^{r=n} r\alpha_r \frac{d\psi}{d\alpha_{r-1}},$$

c'est-à-dire, d'après la deuxième équation (6),

$$\sum_{r=1}^{r=n} ra_{r-1} \frac{d\psi}{da_r} = 0;$$

et l'on trouverait de la même manière

$$\sum_{r=1}^{r=n} (n - r + 1)\, a_r \frac{d\psi}{da_{r-1}} = 0.$$

Ces deux équations démontrent que ψ est un invariant de la fonction (4), ou, en général, une fonction algébrique, entière, rationnelle des invariants de cette même fonction.

Si l'invariant φ est du $m^{ième}$ degré, et que l'on suppose ψ du degré r par rapport aux coefficients de l'évectant, ψ sera du degré $r(m-1)$ par rapport aux coefficients de la fonction.

Dans le cas où la fonction est du troisième degré, son unique invariant est le discriminant u; conséquemment le discriminant U de l'évectant de u (lequel discriminant, d'après ce qui vient d'être dit, sera du degré 4.3) devra être égal à une fonction algébrique, entière, rationnelle du degré de u, c'est-à-dire on devra avoir

$$U = hu^3,$$

h étant un coefficient numérique qui, comme on l'a vu, est égal à 16.

Pour la fonction homogène du quatrième degré

$$a_0 x^4 + 4 a_1 x^3 y + 6 a_2 x^2 y^2 + 4 a_3 x y^3 + a_4 y^4,$$

on a l'invariant quadratique

$$Y_2 = a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2,$$

l'invariant cubique

$$Y_3 = a_0 a_2 a_4 + 2 a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_4 a_1^2 - a_2^3,$$

et le discriminant

(7) $$D = Y_2^3 - 27 Y_3^2.$$

Représentons par E_2, E_3, E_6 les évectants correspondants à ces trois invariants, et par $Y_2(E_2)$, $Y_2(E_3)$, $Y_3(E_2)$,... les invariants quadratiques, cubiques, etc., des évectants E_2, E_3,....

En prenant, par exemple, la forme $Y_3(E_6)$, évidemment du quinzième degré, on aura, d'après le théorème précédent,

$$Y_3(E_6) = l Y_2^6 Y_3 + m Y_2^3 Y_3^3 + n Y_3^5;$$

et pour $Y_2(E_3)$, du quatrième degré, on aura aussi

$$Y_2(E_3) = p Y_2^2,$$

l, m, n, p étant des coefficients numériques. Ces coefficients, pour la fonction homogène du quatrième degré, se déterminent facilement, et l'on obtient les relations

$$Y_2(E_2) = Y_2, \quad Y_2(E_3) = \frac{1}{12} Y_2^2,$$

$$Y_2(E_6) = 9 Y_2^2 (Y_2^3 - 27 Y_3^2) = 9 Y_2^2 D.$$

On trouve semblablement

$$Y_3(E_2) = Y_3, \quad Y_3(E_3) = \frac{1}{216}(54 Y_3^2 - Y_2^3), \quad Y_3(E_6) = -54 Y_3 D^2,$$

et enfin

$$D(E_2) = D, \quad D(E_3) = Y_2^3(E_3) - 27 Y_3^2(E_3) = \frac{1}{16} Y_3^2 D,$$

$$D(E_6) = Y_2^3(E_6) - 27 Y_3^2(E_6) = 729(Y_2^3 - 54 Y_3^2) D^3.$$

La dernière de ces relations est pour les fonctions du quatrième degré l'analogue de la relation (1) pour les formes du troisième degré.

Des équations

$$\frac{d\varphi}{da_0} = \alpha_0, \quad \frac{d\varphi}{da_1} = \alpha_1, \ldots, \quad \frac{d\varphi}{da_n} = \alpha_n$$

on peut déduire a_0, a_1,..., a_n en fonction de α_0, α_1,..., α_n

et réciproquement; et si l'on considère φ comme dépendant de $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ en tant que ces dernières quantités dépendent elles-mêmes de $a_0, a_1, \ldots$, on aura

$$\frac{d\varphi}{d\alpha_0}\frac{d\alpha_0}{da_r}+\frac{d\varphi}{d\alpha_1}\frac{d\alpha_1}{da_r}+\ldots+\frac{d\varphi}{d\alpha_n}\frac{d\alpha_n}{da_r}=\frac{d\varphi}{da_r}=\alpha_r.$$

On peut déduire de là les valeurs de $\frac{d\varphi}{d\alpha_0}, \frac{d\varphi}{d\alpha_1}, \ldots$, et l'on aura par exemple

$$\Delta\frac{d\varphi}{d\alpha_0}=\begin{vmatrix} \alpha_0 & \frac{d\alpha_1}{da_0} \ldots & \frac{d\alpha_n}{da_0} \\ \alpha_1 & \frac{d\alpha_1}{da_1} \ldots & \frac{d\alpha_n}{da_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_n & \frac{d\alpha_1}{da_n} \ldots & \frac{d\alpha_n}{da_n} \end{vmatrix}$$

où

$$\Delta=\Sigma\left(\pm\frac{d\alpha_0}{da_0}\frac{d\alpha_1}{da_1}\ldots\frac{d\alpha_n}{da_n}\right).$$

En se rappelant que $\frac{d\alpha_r}{da_s}=\frac{d\alpha_s}{da_r}$, l'équation précédente peut se mettre sous la forme

$$(m-1)\Delta\frac{d\varphi}{d\alpha_0}=\begin{vmatrix} (m-1)\alpha_0 & \frac{d\alpha_0}{da_1} \ldots & \frac{d\alpha_0}{da_n} \\ (m-1)\alpha_1 & \frac{d\alpha_1}{da_1} \ldots & \frac{d\alpha_1}{da_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ (m-1)\alpha_n & \frac{d\alpha_n}{da_1} \ldots & \frac{d\alpha_n}{da_n} \end{vmatrix}$$

et, comme en vertu de l'homogénéité de φ,

$$a_0\frac{d\alpha_r}{da_0}+a_1\frac{d\alpha_r}{da_1}+\ldots+a_n\frac{d\alpha_r}{da_n}=(m-1)\alpha_r,$$

si l'on ajoute aux éléments de la première colonne ceux des autres colonnes respectivement multipliées par $-a_1$, $-a_2, \ldots, -a_n$, on obtient

$$(m-1)\frac{d\varphi}{d\alpha_0} = a_0,$$

et généralement

$$(m-1)\frac{d\varphi}{d\alpha_s} = a_s.$$

Il résulte de là que si l'on considère l'évectant de l'invariant du degré r d'une fonction homogène quelconque (4), l'invariant du $r^{ième}$ degré de cet évectant pourra s'exprimer par le moyen de l'invariant considéré de la fonction, c'est-à-dire que l'on aura, en se conformant à la notation adoptée,

$$\mathrm{Y}_r(\mathrm{E}_r) = h\,\mathrm{Y}_r^{r-1}.$$

En faisant, pour abréger,

$$\alpha_s = \frac{d\mathrm{Y}_r}{da_s},$$

on aura

$$(r-1)\frac{d\mathrm{Y}_r}{d\alpha_s} = a_s,$$

et, par suite,

$$\frac{d\mathrm{Y}_r(\mathrm{E}_r)}{d\alpha_s} = h\,\mathrm{Y}_r^{r-2}\,a_s.$$

Ces relations se vérifient précisément pour l'évectant du discriminant de la fonction homogène du troisième degré, et l'on a

$$\mathrm{U} = 16u^3,$$

$$\frac{d\mathrm{U}}{d\alpha_0} = 16u^2a_0,\quad \frac{d\mathrm{V}}{d\alpha_2} = 16u^2a_1,\quad \frac{d\mathrm{U}}{d\alpha_3} = 16u^2a_2,\quad \frac{d\mathrm{U}}{d\alpha_3} = 16u^2a_3,$$

formules que M. Eisenstein avait données sans démonstration.

2. Je passe à quelques formules qui ont trait à la résolu-

tion des équations. Considérons l'équation

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0,$$

et supposons que les coefficients a_i soient des fonctions d'une variable y. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les racines de cette équation. En substituant l'une d'elles, x, dans cette même équation et différentiant par rapport à y dont x est alors fonction, il vient

$$f'(x)\frac{dx}{dy} + f'(y) = 0,$$

$f'(x)$ étant la dérivée de $f(x)$ en n'y faisant varier que x et $f'(y)$ la dérivée de la même fonction quand on a égard à la seule variabilité des coefficients. Or en désignant par Δ le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

on a (*voir* pages 88 et 91)

$$\frac{1}{F'(x)} = \frac{1}{\Delta}\frac{d\Delta}{dx^{n-1}}, \qquad \Delta^2 = D = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{n-1} & s_n & \ldots & s_{2n-2} \end{vmatrix},$$

$$\left(\frac{d\Delta}{dx^{n-1}}\right)^2 = Q = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_{n-2} & 1 \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_{n-1} & x \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{n-2} & s_{n-1} & \ldots & s_{2n-4} & x^{n-2} \\ 1 & x & \ldots & x^{n-2} & 1 \end{vmatrix}$$

par conséquent, en substituant, il viendra

$$\frac{dx}{dy}\sqrt{D} + f'(y)\sqrt{Q} = 0.$$

Si l'on suppose que les coefficients de $f(x)=0$ sont des fonctions linéaires entières de la variable y, on déduit facilement de cette formule l'important théorème relatif à la résolution analytique des équations algébriques que le professeur distingué M. Betti a publié dans les *Annales* de M. Tortolini (année 1854). Effectivement, quand on suppose

$$f(x)=\varphi(x)+y\psi(x),$$

il en résulte

$$\frac{dx}{dy}\sqrt{D}+\psi(x)\sqrt{Q}=0,$$

et le polynôme Q se réduit à une fonction algébrique rationnelle de la seule variable x en remplaçant dans ce polynôme y par sa valeur $-\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$. La formule (*) se présente ici sous une forme plus commode dans les applications que celle que lui a donnée M. Betti. Nous prendrons l'exemple même que choisit cet auteur, savoir

$$f(x)=x^5+5x^3-y.$$

On a dans ce cas

$$D=5^5y^2(y^2+108),$$

$$Q=5^3\left(\begin{array}{c}12x^6-4x^5y+120x^4-28x^3y+x^2y^2\\+300x^2-40xy+8y^2\end{array}\right),$$

ou, en mettant pour y sa valeur x^5+5x^3,

$$Q=5^3x^2(x^2+5)^2(x^6+4x^4-8x^2+12);$$

et, par conséquent,

$$5\frac{dx}{dy}y\sqrt{(y^2+108)}=x(x^2+5)\sqrt{(x^6+4x^4-8x^2+12)}.$$

(*) La formule dont il s'agit faisant connaître $\frac{dx}{dy}$ et par suite $\frac{d^2x}{dy^2}$, il sera possible, par la formule de Maclaurin ou de Taylor, de développer x suivant les puissances de y. (*Note du Traducteur.*)

Il est évident que toutes les fois que $\psi(x)$ sera égal à une constante, φ se réduira à une fonction entière de la variable x et du degré

$$n(n-3)+2=(n-1)(n-2),$$

et D sera du degré $n-1$.

Je considère à présent les deux équations

$$\frac{dx_r}{da_1}\frac{da_1}{dx_r}+\frac{dx_r}{da_2}\frac{da_2}{dx_r}+\ldots+\frac{dx_r}{da_n}\frac{da_n}{dx_r}=1,$$
$$\frac{dx_r}{da_1}\frac{da_1}{dx_s}+\frac{dx_r}{dx_2}\frac{da_2}{dx_s}+\ldots+\frac{dx_r}{da_n}\frac{da_n}{dx_s}=0 \quad (*);$$

on en déduit, en multipliant la dernière par x_s^i et sommant par Σ_s,

$$\frac{dx_r}{da_1}\sum_{s=1}^{s=n}\frac{da_1}{dx_s}x_s^i+\frac{dx_r}{da_2}\sum_{s=1}^{s=n}\frac{da_2}{dx_s}x_s^i+\ldots+\frac{dx_r}{da_n}\sum_{s=1}^{s=n}\frac{da_n}{dx_s}x_s^i=x_r^i.$$

Mais

$$\Sigma_s\frac{da_r}{dx_s}x_s^i=-(s_{i+r-1}+a_1s_{i+r-2}+\ldots+a_{r-1}s_i)=k_{i,r}\ (**);$$

donc

$$(a)\qquad k_{i,1}\frac{dx}{da_1}+k_{i,2}\frac{dx}{da_2}+\ldots+k_{i,n}\frac{dx}{da_n}+x^i=0,$$

équation aux dérivées partielles à laquelle doit satisfaire une racine quelconque de $f(x)=0$ (***). Il importe d'ob-

---

(*) Elles résultent immédiatement de $\frac{d\varphi}{dx_r}=\sum_{i=1}^{i=n}\frac{d\varphi}{da_i}\frac{da_i}{dx_r}$ quand on y fait successivement $\varphi=x_r$, $\varphi=x_s$. (*Note du Traducteur.*)

(**) *Voir* la remarque qui termine le précédent Mémoire de M. Brioschi. (*Note du Traducteur.*)

(***) CRELLE, tome XLVIII. Article du professeur Raabe.

server que l'équation (a) ne peut fournir que n équations indépendantes entre elles et qui proviénnent de $i=0$, $1, 2, \ldots, n-1$; car celle qu'on trouverait en posant $i=n$ résulte de ces dernières multipliées respectivement par $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1$ et ajoutées. La même chose a lieu pour l'équation suivante, qui n'est autre que l'équation (a) mise sous une autre forme:

$$s_i \frac{dx}{ds_1} + 2s_{i+1}\frac{dx}{ds_2} + \ldots + ns_{i+n-1}\frac{dx}{ds_n} = x^i.$$

Quand on suppose $i=0$, l'équation (a) devient

$$n\frac{dx}{da_1} + (n-1)\,a_1\frac{dx}{da_2} + \ldots + a_{n-1}\frac{dx}{da_n} + 1 = 0,$$

et l'on vérifie qu'elle est satisfaite en prenant

$$(b) \qquad x = -\frac{a_1}{n} + \varphi(\alpha_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}),$$

où

$$\alpha_r = a_{r+1} - (n-r)\frac{a_1}{n} + \frac{(n-r)(n-r+1)}{1.2}a_{r-1}\frac{a_1^2}{n}\ldots$$
$$-(-1)^{r-1}\frac{(n-r)(n+r-1)\ldots(n-2)}{1.2.3\ldots(r-1)}a_2\frac{a_1^{r-1}}{n^{r-1}}$$
$$+(-1)^r\frac{(n-r)(n-r+1)\ldots(n-1)\,n}{1.2.3\ldots(r+1)}\frac{a_1^{r+1}}{n^{r+1}},$$

et où φ désigne une fonction arbitraire. On remarquera que les α_r sont précisément les coefficients de l'équation que l'on obtient quand on fait évanouir le second terme de $f(x)=0$.

Les quantités α_r étant homogènes en indice (*) par

(*) *Voir* la remarque qui termine le Mémoire.

rapport à a_1, a_2, ..., a_{r+1}, on aura

$$(\alpha) \quad a_1 \frac{d\alpha_r}{da_1} + 2a_2 \frac{d\alpha_r}{da_2} + \ldots + (r+1)\, a_{r+1} \frac{d\alpha_r}{da_{r+1}} = (r+1)\, \alpha_r.$$

Au moyen de cette équation et de ses analogues, on transforme aisément celle qui se déduit de (a) pour $i=1$, savoir :

$$a_1 \frac{dx}{da_1} + 2a_2 \frac{dx}{da_2} + \ldots + na_n \frac{dx}{da_n} = x,$$

et l'on trouve

$$2\alpha_1 \frac{d\varphi}{d\alpha_1} + 3\alpha_2 \frac{d\varphi}{d\alpha_2} + \ldots + n\alpha_{n-1} \frac{d\varphi}{d\alpha_{n-1}} = \varphi;$$

d'où

$$(c) \qquad \varphi = \psi(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-2}) \sqrt{\alpha_1},$$

ψ étant le symbole d'une fonction arbitraire, et

$$\beta_r = \frac{\alpha_{r+1}^2}{\alpha_1^{r+2}}.$$

Les quantités $\sqrt{\beta_1}$, $\sqrt{\beta_2}$, ... sont les coefficients de l'équation que l'on obtient quand on fait disparaître le second terme de $f(x)=0$, et qu'on réduit à l'unité le coefficient du troisième; effectivement, par la substitution

$$x = -\frac{a_1}{n} + y\sqrt{\alpha_1},$$

cette équation devient

$$y^n + y^{n-2} + y^{n-3}\sqrt{\beta_1} + \ldots + y\sqrt{\beta_{n-3}} + \sqrt{\beta_{n-2}} = 0.$$

Si dans l'équation (a), quand on y aura fait $i=2$, on substitue pour x sa valeur (b), on obtient, après quelques

réductions,

$$\Sigma_r \frac{d\varphi}{d\alpha_r}\left[(r+2)\alpha_{r+1} - \frac{2}{n}(r+1)a_1\alpha_r - \frac{2}{n}(n-r)\alpha_1\alpha_{r-1}\right]$$
$$= \varphi^2 - 2\frac{a_1}{n}\varphi + \frac{2}{n}\alpha_1$$

avec les conditions $\alpha_0 = 0$, $\alpha_n = 0$; et en substituant pour φ sa valeur (c), on obtient

$$\Sigma_r \frac{d\psi}{d\beta_r}\left[2(r+3)\sqrt{\beta_{r+1}} - 3(r+2)\sqrt{\beta_1}\,\beta_r - \frac{4}{n}(n-r-1)\sqrt{\beta_{r-1}}\right]$$
$$= \psi^2 - \frac{3}{2}\psi\sqrt{\beta_1} + \frac{2}{n}$$

avec les conditions $\beta_0 = 1$, $\beta_{n-1} = 0$.

En faisant

$$\sqrt{\beta_r} = \frac{1}{2}b_r,$$

il vient

$$\Sigma_r \frac{d\psi}{db_r}\left[(r+3)b_{r+1} - \frac{3}{4}(r+2)b_1 b_r - \frac{2}{n}(n-r-1)b_{r-1}\right]$$
$$= \psi^2 - \frac{3}{4}\psi b_1 + \frac{2}{n},$$

équation qu'il faudrait intégrer pour connaître la forme de la fonction ψ

(Pavie, octobre 1854.)

Remarque du Traducteur.— Si l'on considère un terme $A a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \ldots a_n^{\lambda_n}$ d'une fonction algébrique, entière et rationnelle, et qu'on multiplie l'indice de chaque lettre a_i par l'exposant de cette même lettre, la somme faite de tous ces produits, c'est-à-dire $1\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 + \ldots + n\lambda_n$, est ce que M. Transon nomme l'*indice* du terme dont il s'agit. L'indice ainsi défini restant constamment le même

pour les différents termes de la fonction, on dit dans ce cas que la fonction est *homogène en indice*. Une pareille fonction vérifie, pour θ, l'équation différentielle partielle

$$a_1 \frac{d\theta}{da_1} + 2a_2 \frac{d\theta}{da_2} + \ldots + na_n \frac{d\theta}{da_n} = p\theta,$$

où p désigne l'indice. Et si l'on cherche les fonctions algébriques qui vérifient réciproquement cette équation, on trouve qu'elles sont nécessairement homogènes en indice. Il suffit pour s'en convaincre de remplacer $a_1, a_2, \ldots, a_n$ par $a_2'^2$, $a_3'^3, \ldots$, $a_n'^n$, ce qui réduit l'équation précédente à la forme canonique qui caractérise les fonctions homogènes.

FIN.

